



Основная профессиональная образовательная программа  
01.03.01 Математика  
(Математика, алгоритмы и анализ данных)

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

ИВАНОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра фундаментальной математики

ОДОБРЕНО:

Руководитель ОП

\_\_\_\_\_  
(подпись) Ю.А. Хашина

«\_30\_» августа\_2024 г.

Рабочая программа дисциплины

Алгебра

|  |                                       |
|--|---------------------------------------|
| Уровень высшего образования:                           | бакалавриат                           |
| Квалификация выпускника:                               | бакалавр                              |
| Направление подготовки:                                | 01.03.01 Математика                   |
| Направленность (профиль)<br>образовательной программы: | Математика, алгоритмы и анализ данных |

Иваново



Основная профессиональная образовательная программа  
01.03.01 Математика  
(Математика, алгоритмы и анализ данных)

### **1. Цели освоения дисциплины «Алгебра»:**

-получение студентами базовых знаний по общей теории систем линейных уравнений (включая теорию определителей, теорию линейной зависимости и теорию матричных рангов), по матричной алгебре и теории многочленов (над полями), по линейной алгебре (включая теорию линейных пространств, линейных отображений и билинейных функций).

-формирование у студентов способности решать стандартные задачи по перечисленным выше разделам алгебры;

-формирование у студентов общей математической культуры, в том числе способности к осмысленному восприятию и воспроизведению абстрактных определений, теорем и их доказательств, а также способности к самостоятельным абстрактным математическим рассуждениям, способности решать задачи теоретического характера по теории колец;

-формирование у студентов навыков научно-исследовательской работы (способности самостоятельно доказывать простые утверждения, выдвигать гипотезы, подтверждать или опровергать их, развивать математическую интуицию).

### **2. Место дисциплины в структуре ОП**

Дисциплина «Алгебра» закладывает основу алгебраических знаний студентов, используется во всех математических дисциплинах (в рамках данной ОП) и способствует научной работе студентов по алгебраической тематике. На дисциплине «Алгебра» основана бакалаврская дисциплина «Алгебраические системы». На этой дисциплине основаны все дисциплины алгебраического цикла для магистрантов (направления 01.04.01 и 02.04.01), а также для аспирантов, работающих по научной специальности 01.01.06 – Математическая логика алгебра и теория чисел.

Для успешного изучения дисциплины «Алгебра» необходимы «входные» знания и умения в области математики, полученные в процессе обучения в средней школе, в том числе обучающийся должен

**знать** алгебру в объеме, предусмотренном школьной программой,

**уметь** решать стандартные алгебраические задачи,

**иметь** навыки математических рассуждений, базовый уровень математической культуры.

### **3. Планируемые результаты обучения по дисциплине**

#### **3.1. Компетенции, формированию которых способствует дисциплина**

Учебным планом при освоении данной дисциплины предусмотрено формирование следующих компетенций в соответствии с ФГОС ВО по данному направлению подготовки:

- общепрофессиональные (ПК):

ОПК-1. Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности.

#### **3.2. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с индикаторами достижения формируемых компетенций.**

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

**Знать:** фундаментальные алгебраические понятия и классические алгебраические результаты (теоремы) с доказательствами по следующим разделам алгебры: общая теория систем линейных уравнений (включая теорию определителей, теорию линейной зависимости и теорию матричных рангов), матричная алгебра и теория многочленов (над полями), основы линейной алгебры (включая теорию линейных пространств, линейных отображений и билинейных



Основная профессиональная образовательная программа  
01.03.01 Математика  
(Математика, алгоритмы и анализ данных)

---

функций), основы общей алгебры, включая теорию групп и теорию колец. По каждому из перечисленных выше разделов алгебры знать постановки и методы решения стандартных задач вычислительного характера (ОПК-1.1).

**Уметь:** осмысленно воспринимать и воспроизводить математические определения, теоремы и доказательства, логически мыслить, самостоятельно рассуждать и доказывать простые утверждения, устанавливать логические связи между понятиями, корректно формулировать и осмысленно решать стандартные задачи вычислительного характера, в том числе решать системы линейных уравнений, вычислять определители, исследовать системы векторов на линейную зависимость, находить ранг матрицы, вычислять обратную матрицу, работать с комплексными числами, находить корни многочленов и НОД двух многочленов, строить базисы в подпространствах конечномерных линейных пространств, находить базисы ядра и образа линейного отображения, находить собственные векторы и собственные значения для линейных операторов, строить ортогональные базисы в конечномерных евклидовых пространствах, иллюстрировать на конкретных примерах простейшие свойства групп и колец (ОПК-1.2).

**Владеть:** достаточным уровнем математической культуры, навыками самостоятельной исследовательской работы на основе глубоких знаний и постоянных размышлений над алгебраической задачей (или проблемой), определенным уровнем математической интуиции, достаточным уровнем информационной и библиографической культуры в процессе поиска необходимой информации (ОПК-1.3).

#### **4. Объем и содержание дисциплины**

Объем дисциплины составляет 10 зачетных единиц (360 академических часов), 1-й семестр - 5 зачетных единиц (180 академических часов), 2-й семестр - 5 зачетных единиц (180 академических часов).

##### **4.1. Содержание дисциплины по разделам (темам), соотнесенное с видами и трудоемкостью занятий лекционно-семинарского типа**

Объем иной контактной работы и самостоятельной работы обучающегося по дисциплине указан в учебном плане образовательной программы.



Основная профессиональная образовательная программа  
01.03.01 Математика  
(Математика, алгоритмы и анализ данных)

| №<br>п/п             | Разделы (темы)<br>дисциплины   | Семестр | Виды занятий, их<br>объем (в ак. часах, по<br>очной форме обучения) |                                   | Формы текущего<br>контроля успеваемости (по<br>очной форме обучения) |
|----------------------|--|---------|---|-----------------------------------|--|
|                      |  |         | Занятия<br>лекцион-<br>ного типа                                    | Занятия<br>семинар-<br>ского типа | Формы промежуточной<br>аттестации                                    |
| 1.                   | Введение в алгебру   |         |   |                                   |  |
| 1.1                  | Множества, отображения и<br>подстановки                              | 1       | 6   | 2                                 |  |
| 1.2                  | Системы линейных уравнений,<br>определители и матричная алгебра      | 1       | 16  | 16                                |  |
| 1.3                  | Комплексные числа и многочлены                                       | 1       | 14  | 14                                |  |
| Итого за 1-й семестр |  |         | 36  | 32                                | Экзамен  |
| 2                    | Линейная алгебра   |         |   |                                   |  |
| 2.1                  | Линейные пространства и<br>подпространства. Линейная<br>зависимость. | 2       | 12  | 12                                |  |
| 2.2                  | Матричные ранги и общая теория<br>систем линейных уравнений.         | 2       | 8   | 8                                 |  |
| 2.3                  | Линейные отображения линейных<br>пространств, билинейные функции     | 2       | 12  | 12                                |  |
| Итого за 2-й семестр |  |         | 32  | 32                                | Экзамен  |
| Итого по дисциплине  |  |         | 68  | 64                                |  |

#### 4.2. Развернутое описание содержания дисциплины по разделам (темам)

##### 1. ВВЕДЕНИЕ В АЛГЕБРУ

###### Раздел 1.1. Множества, отображения и подстановки

Теоретико-множественные операции. Отображения. Умножение отображений, обратимость отображений. Инъективные, сюръективные и взаимно однозначные отображения. Равносильность обратимости отображения и его взаимной однозначности.

Равномощные множества. Счетные и континуальные множества. Континуум-гипотеза.

Подстановки и их умножение. Разложение подстановки в произведение независимых циклов и в произведение транспозиций. Четные и нечетные подстановки.

###### Раздел 1.2. Системы линейных уравнений, определители и матричная алгебра

Элементарные преобразования матриц. Приведение матрицы к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований.

Понятие системы линейных уравнений и ее решения. Нахождение решений треугольных, трапециевидных и ступенчатых систем линейных уравнений. Переход к равносильной системе линейных уравнений с помощью элементарных преобразований. Метод Гаусса приведения системы линейных уравнений к равносильному ступенчатому виду.

Общее понятие определителя, вычисление определителей порядка 2 и 3. Сохранение определителя при транспонировании, и его поведение при перестановке строк. Понятие минора и



Основная профессиональная образовательная программа  
01.03.01 Математика  
(Математика, алгоритмы и анализ данных)

алгебраического дополнения элемента определителя. Теорема о разложении определителя по строке и ее простейшие следствия. Поведение определителя при элементарных преобразованиях строк. Вычисление определителей методом понижения порядка с применением элементарных преобразований.

Формулы Крамера для решения систем линейных уравнений.

Сложение и умножение матриц, ассоциативность умножения. Мультипликативное свойство определителя. Обратная матрица и критерий ее существования на языке определителей. Вычисление обратной матрицы с помощью присоединенной матрицы и с помощью элементарных преобразований строк. Матричная интерпретация системы линейных уравнений.

### **Раздел 1.3. Комплексные числа и многочлены**

Понятие алгебраической операции на множестве. Понятие группы, кольца, поля. Примеры числовых и матричных колец.

Построение поля комплексных чисел. Алгебраическая и тригонометрическая формы комплексного числа. Операции над комплексными числами в алгебраической и тригонометрической форме. Понятие модуля комплексного числа и сопряжения к комплексному числу, геометрический смысл этих понятий. Решение квадратных уравнений в поле комплексных чисел. Формула Муавра. Извлечение корня из комплексного числа. Корни из 1 и их геометрическая интерпретация.

Построение кольца многочленов над полем. Теорема о делении с остатком для многочленов. Понятие делимости и ассоциированности в кольце многочленов. Наибольший общий делитель двух многочленов и его вычисление с помощью алгоритма Евклида. Неприводимые многочлены и их простейшие свойства, связанные с делимостью. Теорема о разложении многочлена над полем в произведение неприводимых сомножителей. Корни многочлена и теорема Безу. Понятие кратности корня многочлена. Схема Горнера. Нахождение рациональных корней многочлена с рациональными коэффициентами. Критерий Эйзенштейна неприводимости многочлена над полем рациональных чисел. Алгебраически замкнутые поля. Основная теорема алгебры об алгебраической замкнутости поля комплексных чисел. Теорема о разложении многочлена с действительными коэффициентами на множители первой и второй степени над полем действительных чисел.

## **2. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА**

### **Раздел 2.1. Линейные пространства и подпространства. Линейная зависимость**

Понятие линейного пространства. Векторы и скаляры. Примеры линейных пространств. Координатное пространство. Подпространства и их простые свойства. Примеры подпространств. Линейная оболочка системы векторов (как пример подпространства) и линейная выражаемость вектора через систему векторов.

Линейная зависимость и линейная независимость системы векторов. Основная теорема о линейной зависимости. Базис и размерность линейного пространства. Корректность определения размерности (равномощность любых двух базисов линейного пространства). Нахождение базиса линейной оболочки системы векторов.

Координатная строка вектора в данном базисе и ее изменение при переходе к новому базису. Матрица перехода от одного базиса к другому

### **Раздел 2.2. Матричные ранги и общая теория систем линейных уравнений**



Строчный (столбцовый) ранг матрицы как размерность линейной оболочки системы ее строк (столбцов). Минорный ранг матрицы. Теорема о ранге матрицы (о совпадении строчного, столбцового и минорного ранга). Вычисление ранга матрицы с помощью элементарных преобразований. Нахождение базисного минора матрицы.

Общая теория систем линейных уравнений. Теорема Кронекера – Капелли.

Пространство решений однородной системы линейных уравнений и зависимость его размерности от ранга системы. Фундаментальная система решений однородной системы линейных уравнений. Связь общего решения неоднородной системы линейных уравнений с общим решением соответствующей однородной системы.

Сумма и пересечение двух подпространств, связь между их размерностями. Вычисление базисов суммы и пересечения линейных оболочек двух систем векторов. Прямые суммы подпространств

### **Раздел 2.3. Линейные отображения линейных пространств и билинейные функции**

Линейные отображения линейных пространств, их простейшие свойства. Линейные операторы. Изоморфные пространства. Изоморфизм между конечномерным линейным пространством и координатным пространством. Ядро и образ линейного отображения, связь между рангом и дефектом линейного отображения. Фактор-пространство и естественное отображение. Алгебра линейных операторов.

Матрица линейного отображения. Существование линейного отображения с заданной матрицей. Изоморфизм алгебры линейных операторов конечно-мерного линейного пространства и матричной алгебры. Изменение координатной строки вектора при линейном отображении. Вычисление базиса ядра и образа линейного отображения, заданного матрицей. Изменение матрицы линейного отображения при переходе к новым базисам.

Характеристический многочлен матрицы, его сохранение при сопряжении матрицы. Характеристический многочлен линейного оператора. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора. Совпадение множества всех собственных значений линейного оператора с множеством всех корней его характеристического многочлена. Собственные подпространства и нахождение их базисов. Диагонализируемость линейного оператора и ее достаточные условия. Теорема Гамильтона – Кэли об аннулировании линейного оператора своим характеристическим многочленом.

Билинейные функции на линейных пространствах и их матрицы. Симметричные билинейные функции и ортогональность. Положительно определенные билинейные функции на действительных пространствах. Критерий Сильвестра положительной определенности действительной симметричной билинейной функции.

Евклидовы пространства. Понятие нормы вектора. Неравенство треугольника, теорема Пифагора. Линейная независимость ортогональной системы векторов евклидова пространства. Алгоритм дополнения ортогональной системы векторов до ортогонального базиса. Нахождение базиса ортогонального дополнения линейной оболочки системы векторов евклидова пространства. Метод ортогонализации Грама – Шмидта для нахождения ортогонального базиса линейной оболочки системы векторов евклидова пространства.

### **5. Образовательные технологии**

Технология проблемного обучения – демонстрация на лекциях и практических занятиях проблемных ситуаций. Проблемы учебного характера как правило формулируются в виде задач и решаются студентами самостоятельно и на практических занятиях под руководством и при



Основная профессиональная образовательная программа  
01.03.01 Математика  
(Математика, алгоритмы и анализ данных)

поддержке преподавателя. Решение каждой задачи – это не только формулы; оно должно иметь четкую логическую структуру, содержать необходимые доказательства, пояснения, комментарии, ссылки на теоретические факты.

Информационные технологии: технологии смешанного обучения, использование компьютерных презентаций, обеспечение студентов текстами лекций.

#### **6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся**

Самостоятельная работа студентов состоит в следующем: еженедельное работа с рукописными и электронными конспектами лекций (материалы выдаются студентам по мере необходимости), изучение литературы указанной в разделе 8 рабочей программы, выполнение домашних заданий (задания выдаются на каждом практическом занятии, и, при необходимости, в системе электронной поддержки образовательного процесса «Мой университет» <https://uni.ivanovo.ac.ru>), подготовка к решению задач, предлагаемых на экзамене (разработаны комплекты типовых задач), подготовка к экзаменам (вопросы и другие материалы для сдачи экзаменов доступны каждому студенту как в бумажном виде так и в системе «Мой университет»). Методические пособия по данному курсу находятся в библиотечных фондах ИвГУ, их выходные данные представлены в **приложениях** к рабочей программе. Там же представлены и другие методические материалы по данной дисциплине.

#### **7. Характеристика оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине**

Итоговой формой контроля является устный экзамен. Экзаменационный билет содержит 2 вопроса. Кроме того, студенту выдается задача. Ответ на каждый вопрос оценивается отдельно следующим образом.

##### **Критерии и шкала оценки ответа на экзаменационный вопрос.**

Если студент демонстрирует знание основных понятий и классических результатов алгебры, входящих в программу экзамена, то оценка должна быть положительной.

Если наряду с перечисленным выше студент осмысленно воспроизводит доказательства математических теорем, четко и аккуратно формулирует математические высказывания, демонстрирует глубокие знания и достаточный уровень математической культуры, то ему выставляется либо оценка «хорошо» либо оценка «отлично».

Если наряду с перечисленным выше студент умеет самостоятельно доказывать математические теоремы на основе глубоких знаний и математической интуиции, способен к научной дискуссии и к самостоятельной исследовательской деятельности в области математики, то ему выставляется оценка «отлично».

##### **Критерии и шкала оценки решения задачи:**

Оценка «удовлетворительно» ставится, если студент знает подходы и методы решения предложенной ему задачи, но в процессе решения допустил существенную вычислительную или логическую ошибку.

Оценка «хорошо» ставится, если задача решена правильно (или с незначительной ошибкой, которую студент самостоятельно устранил по ходу ответа), но решение сделано по «формальной схеме» и не подкрепляется глубокими знаниями.

Оценка «отлично» ставится, если задача решена правильно (или с незначительной ошибкой, которую студент самостоятельно устранил по ходу ответа) и при этом решение задачи подкрепляется глубокими знаниями и высоким уровнем математической культуры.

##### **Критерии и шкала итоговой оценки на экзамене.**



Основная профессиональная образовательная программа  
01.03.01 Математика  
(Математика, алгоритмы и анализ данных)

В качестве итоговой оценки берется результат округления среднего значения следующих трех показателей: оценка ответа на первый экзаменационный вопрос, оценка ответа на второй экзаменационный вопрос, оценка решения задачи.

#### **8. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины**

Основная литература:

1. Кострикин, А.И. Введение в алгебру : учебник / А.И. Кострикин. - М. : МЦНМО, 2009. - Ч. 1. Основы алгебры. - 273 с. - ISBN 978-5-94057-453-8 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=63140>

2. Кострикин, А.И. Введение в алгебру : учебник / А.И. Кострикин. - М. : МЦНМО, 2009. - Ч. 2. Линейная алгебра. - 368 с. - ISBN 978-5-94057-454-5 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=63144>

3. Кострикин, А.И. Введение в алгебру : учебник / А.И. Кострикин. - М. : МЦНМО, 2009. - Ч. 3. Основные структуры алгебры. - 272 с. - ISBN 978-5-94057-455-2 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=62951>

Дополнительная литература:

1. Сборник задач по алгебре : задачник / под ред. А.И. Кострикин. - М. : МЦНМО, 2009. - 404 с. - ISBN 978-5-94057-413-2 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=63274>

Ресурсы информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»:

Система электронной поддержки образовательного процесса «Мой университет» <https://uni.ivanovo.ac.ru>

Общероссийский математический портал <http://www.mathnet.ru/>

Профессиональные базы данных и информационно-справочные системы:

ЭБС «Университетская библиотека онлайн» [www.biblioclub.ru](http://lib.ivanovo.ac.ru/index.php/polnotekstovye-resursy/ebs-universitetskaya-biblioteka);  
<http://lib.ivanovo.ac.ru/index.php/polnotekstovye-resursy/ebs-universitetskaya-biblioteka>

Электронная библиотека ИвГУ <http://lib.ivanovo.ac.ru/index.php/polnotekstovye-resursy/elibnew>

Электронный каталог НБ ИвГУ <http://lib.ivanovo.ac.ru/index.php/ek>

Программное обеспечение: операционная система Microsoft Windows, пакет офисных программ Microsoft Office и(или) LibreOffice, интернет-браузер Microsoft Edge и(или) Yandex Browser.

#### **9. Материально-техническое обеспечение дисциплины**

Учебные аудитории:

- для проведения занятий лекционного типа с комплектом специализированной учебной мебели и техническими средствами обучения, служащими для предоставления учебной информации большой аудитории;

- для проведения занятий семинарского типа, консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации с комплектом специализированной учебной мебели и техническими средствами обучения;

Помещение для самостоятельной работы, оснащенное комплектом специализированной учебной мебели, компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в ЭИОС.

Демонстрационное оборудование: доска, проектор для презентаций.

**Автор(ы) рабочей программы дисциплины:** профессор кафедры фундаментальной математики ИвГУ, доктор физико-математических наук Азаров Дмитрий Николаевич





Основная профессиональная образовательная программа  
01.03.01 Математика  
(Математика, алгоритмы и анализ данных)

---

Программа рассмотрена и утверждена на заседании кафедры фундаментальной математики  
«30» августа 2024 г., протокол № 1

Программа обновлена  
протокол заседания кафедры № \_\_\_\_\_ от «\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 20\_\_ г.  
Согласовано:  
Руководитель ОП \_\_\_\_\_ Ю.А. Хашина  
(подпись)

Программа обновлена  
протокол заседания кафедры № \_\_\_\_\_ от «\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 20\_\_ г.  
Согласовано:  
Руководитель ОП \_\_\_\_\_ Ю.А. Хашина  
(подпись)

Программа обновлена  
протокол заседания кафедры № \_\_\_\_\_ от «\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 20\_\_ г.  
Согласовано:  
Руководитель ОП \_\_\_\_\_ Ю.А. Хашина  
(подпись)