



Программа аспирантуры  
1.1.5 Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика

---

**Министерство науки и высшего образования Российской Федерации**

**ИВАНОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

Кафедра фундаментальной математики

ОДОБРЕНО:

Руководитель ОП

\_\_\_\_\_  
(подпись) Е.В. Соколов

«30» августа 2024 г.

**Рабочая программа дисциплины**

Теория вычислимости

Уровень высшего образования:

Подготовка кадров высшей квалификации

Научная специальность:

1.1.5 Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика

Направленность образовательной программы:

Срок освоения образовательной программы и форма обучения:

4 года (очная форма)

Иваново



### 1. Цели освоения дисциплины:

- изучение современных разделов математической логики и теории алгоритмов. Основная задача – подготовка соискателя к исследованиям в области теории алгоритмов и вычислимых функций (в том числе в области алгоритмической теории информации и теории сложности).
- постановка перед аспирантами научных проблем и создание базы для дальнейших научных исследований по теории вычислимости;
- формирование у аспирантов высокого уровня математической культуры и интуиции, в том числе способности к критическому восприятию и творческому воспроизведению известных математических результатов, а также способности к самостоятельным абстрактным математическим рассуждениям в области теории вычислимости;
- формирование у аспирантов навыков научно-исследовательской работы (способности самостоятельно доказывать известные и новые утверждения, выдвигать гипотезы, подтверждать или опровергать их, способности порождать новые идеи и получать новые научные результаты в области теории вычислимости).

### 2. Место дисциплины в структуре ОП

Данная дисциплина является дисциплиной по выбору (ДВ.2.2). Для ее успешного изучения необходимы «входные» знания и умения, полученные в результате освоения стандартного университетского курса по математической логике.

Для освоения данной дисциплины обучающийся должен:

- знать математическую логику и теорию алгоритмов в объеме, предусмотренном рабочей программой дисциплины «Математическая логика, алгебра и теория чисел»,
- уметь формулировать и доказывать классические результаты математической логики, связанные с исчислениями высказываний и предикатов,
- владеть навыками работы с абстрактными математическими теориями.

Содержание дисциплины является основой научной работы аспирантов, занимающихся изучением теории вычислимости, и способствует научной работе аспирантов в рамках написания диссертационной работе по этому направлению. На этой дисциплине основаны научно-исследовательская деятельность аспиранта и диссертации на соискание ученой степени кандидата наук.

### 3. Планируемые результаты обучения по дисциплине

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

**Знать:** основные понятия и классические результаты математической логики и теории вычислимости, современные направления и проблематику тех разделов теории вычислимости, которые входят в сферу научных интересов аспиранта (эти знания лежат в основе всех перечисленных выше профессиональных компетенций).

**Уметь:** восстанавливать, воспроизводить и творчески перерабатывать доказательства классических и современных теорем в области теории вычислимости, самостоятельно рассуждать и решать научные задачи в указанной выше области, обосновывать или опровергать научные гипотезы, выдвигать научные гипотезы, вести научную дискуссию, развивать свою математическую интуицию на основе глубоких знаний математической логики и теории алгоритмов, проводить самостоятельные научные исследования, порождать новые научные идеи на основе глубоких знаний и математической интуиции, реализовывать свои идеи в виде научных результатов, уметь публично представлять научные результаты, быть готовым к критическому анализу известных результатов в сфере своих научных интересов.

**Владеть:** навыками работы с формальными аналогами понятия алгоритма, техникой интуитивных рассуждений с использованием тезиса Черча, навыками научно-исследовательской работы в области современной теории вычислимых функций, навыками научно-



Программа аспирантуры  
1.1.5 Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика

исследовательской работы в сфере своих научных интересов, высоким уровнем математической культуры и интуиции, навыками перехода от интуитивных научных идей к их четкому и ясному изложению в надлежащем виде – в виде научных публикаций, технологиями поиска информации с помощью сетевых ресурсов, владеть навыками преподавательской работы в части, касающейся умения публично представлять и разъяснять тот или иной математический материал.

#### 4. Объем и содержание дисциплины

Объем дисциплины составляет 3 зачетные единицы (72 академических часа).

#### 4.1. Содержание дисциплины по разделам (темам), соотнесенное с видами и трудоемкостью занятий лекционно-семинарского типа

№ п/п	Разделы (темы) дисциплины	Семестр	Виды занятий, их объем (в ак. часах, по очной форме обучения)		Формы текущего контроля успеваемости (по очной форме обучения)  Формы промежуточной аттестации
			Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа	
1	Фундаментальные понятия теории вычислимости	3	2	2	
2	Вычислимо перечислимые множества и теорема рекурсии	3	2	2	
3	Тьюринговы степени и оператор скачка	3	1	1	
4	Арифметическая иерархия	3	1	1	
5	Проблема Поста и оракульные конструкции	3	1	1	
6	Степени перечислимости	3	1	1	
7	Нетотальные степени перечислимости	3	1	1	
8	Решетка Медведева	3	1	1	
Итого за 3-й семестр			10	10	Зачет с оценкой
Итого по дисциплине			10	10	

#### 4.2. Развернутое описание содержания дисциплины по разделам (темам)

##### I. Фундаментальные понятия теории вычислимости.

Вычислимые функции. Вычислимые по Тьюрингу функции. Рекурсивные вычислимо перечислимые операторы. Сводимости по Тьюрингу и по перечислимости.

##### II. Вычислимо перечислимые множества и теорема рекурсии.

Вычислимо перечислимые множества и неразрешимые проблемы. Теорема Майхилла об изоморфизме. Равномерность и индексы вычислимых и конечных множеств. Теорема рекурсии. Полные, продуктивные и креативные множества.

##### III. Тьюринговы степени и оператор скачка.

Определение относительной вычислимости. Т-степени и оператор скачка. Леммы о модуле и о пределе.

##### IV. Арифметическая иерархия.



Уровни вычислимости в арифметической иерархии. Теорема Поста и теорема об иерархии.  $\Sigma_n$ -полные множества. Высокие и низкие степени. Алгоритм Тарского-Куратовского.

**V. Проблема Поста и оракульные конструкции.**

Иммунные и простые множества. Конструкция Поста. Гиперпростые множества. Низкие простые множества. Теорема Мучника-Фридберга.

**VI. Степени перечислимости.**

Определение сводимости по перечислимости. Структура  $e$ -степеней. Связь между  $e$ -сводимостью и  $T$ -сводимостью.

**VII. Нетотальные степени перечислимости.**

Понятие квазимиимальной  $e$ -степени. Соотношения между сводимостями.

**VIII. Решетка Медведева.**

Массовые проблемы. Степень трудности массовой проблемы

**5. Образовательные технологии**

Технология проблемного обучения – демонстрация на лекциях и практических занятиях проблемных ситуаций. Рассматриваются некоторые недавно решенные научные проблемы, а также открытые проблемы теории групп. Проблемы учебного характера как правило формулируются в виде задач и решаются аспирантами самостоятельно и на практических занятиях под руководством и при поддержке преподавателя. Решение каждой задачи должно иметь четкую логическую структуру, содержать необходимые доказательства, пояснения, комментарии, ссылки на теоретические факты.

Информационные технологии: технологии смешанного обучения, использование компьютерных презентаций, обеспечение студентов текстами лекций в электронной форме.

**6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся**

Самостоятельная работа аспирантов состоит в следующем: еженедельное работа с рукописными и электронными конспектами лекций (материалы выдаются аспирантам по мере необходимости), изучение литературы указанной в разделе 8 рабочей программы, выполнение домашних заданий (задания выдаются на каждом практическом занятии, и, при необходимости, в системе электронной поддержки образовательного процесса «Мой университет» <https://uni.ivanovo.ac.ru>), подготовка к зачету (вопросы и другие материалы для сдачи зачета доступны каждому аспиранту как в бумажном виде (в ауд. 326 первого уч. корпуса) так и в системе «Мой университет»). Методические пособия по данному курсу находятся в библиотечных фондах ИвГУ, их выходные данные представлены в приложении 1 к рабочей программе.

**7. Характеристика оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине**

Промежуточный контроль: устный зачет с оценкой. Цель: подведение итогов освоения аспирантами данной дисциплины. Вопросы к зачету и список задач для зачета приведены в приложениях. Оценивание уровня подготовки аспиранта проводится в форме научного обсуждения, предметом которого являются вопросы теории вычислимости. В ходе этого обсуждения студент дает ответы на предложенные ему вопросы и приводит в письменном виде решение предложенной ему задачи.



Для получения оценки «удовлетворительно» необходимо знание основных понятий и классических результатов теории вычислимости, а также осмысленное решение задачи, предложенной аспиранту.

Для получения оценки «хорошо» наряду с перечисленным выше необходимо уметь воспроизводить и творчески перерабатывать доказательства классических и современных результатов теории вычислимости.

Для получения оценки «отлично» необходимо наряду с перечисленным выше продемонстрировать способность к самостоятельной исследовательской деятельности в данной области (аспиранты, выбирающие для изучения данную дисциплину как правило занимаются соответствующей проблематикой в рамках своей НИР).

### 8. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

#### Основная литература

1. Клини, С. Основания интуиционистской математики с точки зрения теории рекурсивных функций=The foundations of intuitionistic mathematics, especially in relation to recursive functions / С. Клини, Р. Весли ; пер. с англ. Ф.А. Кабакова, Б.А. Кушнер. - Москва : Наука, 1978. - 270 с. - (Математическая логика и основания математики). ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=450474>(15.01.2019).
2. Верещагин, Н.К. Основы теории вычислимых функций : курс / Н.К. Верещагин, А.Х. Шень. - Москва : Интернет-Университет Информационных Технологий, 2007. - 152 с. ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=234891> (15.01.2019).
3. Шенфилд, Д. Степени неразрешимости=Degrees of unsolvability / Д. Шенфилд ; под ред. Ю.Л. Ершова ; ред. В.В. Донченко ; пер. с англ. И.А. Лаврова. - Москва : Наука, 1977. - 192 с. - (Математическая логика и основания математики). ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=450508> (15.01.2019).
4. Марченков, С.С. Рекурсивные функции / С.С. Марченков. - Москва : Физматлит, 2007. - 60 с. - ISBN 978-5-9221-0825-6 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=82569>(15.01.2019).

#### Дополнительная литература

5. Марченков, С.С. Классы элементарных рекурсивных функций / С.С. Марченков. - Москва : Физматлит, 2017. - 136 с. : табл., граф., схем. - Библиогр.: с. 133-135. - ISBN 978-5-9221-1714-2 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=485268> (15.01.2019).
6. Успенский, В.А. Лекции о вычислимых функциях / В.А. Успенский. - Москва : Физматгиз, 1960. - 491 с. : ил. - (Математическая логика и основания математики). - Библиогр.: с. 476-481. - ISBN 978-5-4475-2017-5 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=257432> (15.01.2019).
7. Балюкевич, Э.Л. Математическая логика и теория алгоритмов : учебно-практическое пособие / Э.Л. Балюкевич, Л.Ф. Ковалева. - Москва : Евразийский открытый институт, 2009. - 189 с. - ISBN 978-5-374-00220-1 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=93166> (15.01.2019).

Ресурсы информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»:

Система электронной поддержки образовательного процесса «Мой университет»  
<https://uni.ivanovo.ac.ru>



Программа аспирантуры  
1.1.5 Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика

---

Профессиональные базы данных и информационно-справочные системы:

ЭБС «Университетская библиотека онлайн» [www.biblioclub.ru](http://www.biblioclub.ru)

Электронная библиотека ИвГУ <http://lib.ivanovo.ac.ru>

Электронный каталог НБ ИвГУ <http://lib.ivanovo.ac.ru/index.php/ek>

Программное обеспечение: операционная система Microsoft Windows, пакет офисных программ Microsoft Office и(или) LibreOffice, интернет-браузер Microsoft Edge и(или) Yandex Browser, Мой университет.

## **9. Материально-техническое обеспечение дисциплины**

Учебные аудитории:

- для проведения занятий лекционного типа с комплектом специализированной учебной мебели и техническими средствами обучения, служащими для предоставления учебной информации большой аудитории;

- для проведения занятий семинарского типа, консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации с комплектом специализированной учебной мебели и техническими средствами обучения;

Помещение для самостоятельной работы, оснащенное комплектом специализированной учебной мебели, компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в ЭИОС.

Демонстрационное оборудование: доска, проектор для презентаций.



Программа аспирантуры  
1.1.5 Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика

---

**Автор(ы) рабочей программы дисциплины:** профессор кафедры фундаментальной математики Азаров Дмитрий Николаевич

Программа рассмотрена и утверждена на заседании кафедры фундаментальной математики  
«30» августа 2024 г., протокол № 1.

Программа обновлена  
протокол заседания кафедры № \_ от « » 20 \_ г.

Согласовано:

Руководитель ОП \_\_\_\_\_  
(подпись)

Программа обновлена  
протокол заседания кафедры № \_ от « » \_ г.

Согласовано:

Руководитель ОП \_\_\_\_\_  
(подпись)