

# ВЕСТНИК ИВАНОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Серия «Естественные, общественные науки»

Вып. 2, 2018

Биология. Химия. Физика. Математика

Научный журнал

Издается с 2000 года

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи,  
информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор)  
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-60994 от 5 марта 2015 г.

Учредитель ФГБОУ ВО «Ивановский государственный университет»

## РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ:

- В. Н. Егоров**, д-р экон. наук  
(председатель)
- С. А. Сырбу**, д-р хим. наук  
(зам. председателя)
- В. И. Назаров**, д-р психол. наук  
(зам. председателя)
- К. Я. Авербух**, д-р филол. наук (Москва)
- Ю. М. Воронов**, д-р полит. наук
- Н. В. Усольцева**, д-р хим. наук
- Ю. М. Резник**, д-р филос. наук (Москва)
- О. А. Хасбулатова**, д-р ист. наук
- Л. В. Михеева**  
(ответственный секретарь)

## РЕДКОЛЛЕГИЯ СЕРИИ «ЕСТЕСТВЕННЫЕ, ОБЩЕСТВЕННЫЕ НАУКИ»:

- Б. Я. Солон**, д-р физ.-мат. наук  
(главный редактор серии)
- В. И. Назаров**, д-р психол. наук
- Т. А. Воронова**, канд. пед. наук
- М. В. Клюев**, д-р хим. наук
- В. А. Исаев**, д-р биол. наук
- Д. И. Молдаванский**, д-р физ.-мат. наук
- Е. В. Соколов**, канд. физ.-мат. наук
- В. А. Годлевский**, д-р техн. наук
- Л. И. Минеев**, канд. физ.-мат. наук
- О. В. Кузьмина**, канд. юрид. наук
- Д. В. Кареев**, канд. ист. наук

## Адрес редакции (издательства):

153025 Иваново, ул. Ермака, 39, к. 462  
тел./факс: (4932) 93-43-41  
e-mail: publisher@ivanovo.ac.ru

Подписной индекс в каталоге  
«Пресса России» 41512

Электронная копия журнала размещена  
на сайтах [www.elibrary.ru](http://www.elibrary.ru),  
[www.ivanovo.ac.ru](http://www.ivanovo.ac.ru)

ISSN 2219-5246  
ISSN 2500-2783 (online)

# IVANOVO STATE UNIVERSITY BULLETIN

---

Series «Natural, Social Sciences»

---

Issue 2, 2018

Biology. Chemistry. Physics. Mathematics

---

Scientific journal

Issued since 2000

---

The journal is registered in the Federal Agency for the Oversight in the Sphere of Communication, Information Technology and Mass Communications (Roskomnadzor)  
Registration certificate III № ФС77-60993 of March 5, 2015

---

Founded by Ivanovo State University

---

## EDITORIAL COUNCIL:

- V. N. Egorov**, Doctor of Economics  
(Chairman)
- S. A. Syrbu**, Doctor of Chemistry  
(Vice-Chairman)
- V. I. Nazarov**, Doctor of Psychology  
(Vice-Chairman)
- K. Ya. Averbukh**, Doctor of Philology  
(Moscow)
- Yu. M. Voronov**, Doctor of Politics
- N. V. Usoltseva**, Doctor of Chemistry
- Yu. M. Reznik**, Doctor of Philosophy  
(Moscow)
- O. A. Khasbulatova**, Doctor of History
- L. V. Mikheeva** (Secretary-in-Chief)

## EDITORIAL BOARD OF THE SERIES

«NATURAL, SOCIAL SCIENCES»:

- B. Ya. Solon**, Doctor of Physics  
and Mathematics  
(Chief Editor of the Series)
- V. I. Nazarov**, Doctor of Psychology
- T. A. Voronova**, Candidate of Science
- M. V. Klyuev**, Doctor of Chemistry
- V. A. Isaev**, Doctor of Biology
- D. I. Moldavansky**, Doctor of Physics  
and Mathematics
- E. V. Sokolov**, Candidate of Science,  
Physics and Mathematics
- V. A. Godlevsky**, Doctor of Technical Science
- L. I. Mineev**, Candidate of Technical Science
- O. V. Kuzmina**, Candidate of Science, Law
- D. V. Kareev**, Candidate of Science, History

---

### Address of the editorial office:

153025, Ivanovo, Ermak str., 39, office 462  
tel./fax: (4932) 93-43-41  
e-mail: publisher@ivanovo.ac.ru

Index of subscription  
in the catalogue «Russian Press» 41512  
Electronic copy of the journal can be found  
on the web-sites [www.elibrary.ru](http://www.elibrary.ru),  
[www.ivanovo.ac.ru](http://www.ivanovo.ac.ru)

## СОДЕРЖАНИЕ

---

---

### Биология

<b>Баринов С. Н.</b> Инвентаризация видового списка миног и рыб Ивановской области .....	5
<b>Борисова Е. А., Курганов А. А., Лазарева О. Г.</b> Озеро Пестяковское — памятник природы Ивановской области .....	10
<b>Зарипов В. Н., Барина М. О.</b> Развитие физиологических исследований в Ивановском государственном университете .....	18
<b>Исаев В. А.</b> Энтомологические исследования и биологическое образование в Ивановской области (1918—2017 гг.) .....	21
<b>Минеева Л. Ю., Борисова И. Н., Бугаенко Л. С.</b> Современное состояние коллекций растений ботанического сада ИвГУ .....	29
<b>Сивухин А. Н.</b> Влияние различных концентраций нитрата свинца на почвенную микробиоту .....	33

### Химия

<b>Волкова Т. Г., Таланова И. О.</b> Межмолекулярные взаимодействия в димере аланина .....	38
<b>Крылов Е. Н., Ваганова С. В.</b> Квантово-химическая относительная нуклеофильность полиметилбензолов как дескриптор их реакционной способности при бромировании в среде AcOH .....	42
<b>Крылов Е. Н., Кильдюшова С. С.</b> Реакционная способность арилсульфонилфтальмидов при взаимодействии с алифатическими аминами .....	49

### Математика

<b>Ваганов С. Е.</b> Адаптивный метод удвоения размера изображения .....	59
<b>Вялов А. Ф.</b> Симплекс-алгоритм и полностью вырожденная задача .....	62
<b>Голубев В. Д., Хашин С. И.</b> Числа, псевдопростые по Фробениусу, без больших делителей .....	65
<b>Косарев Н. Г., Тургин Д. В.</b> Об одной оценке решения системы с минимальным ростом по параметру .....	68
<b>Молдавский Д. И.</b> Об аппроксимируемости конечными группами некоторых групп с одним определяющим соотношением .....	76
<b>Хашина Ю. А.</b> Представление биквадратичной функции в виде суммы/разности квадратов .....	84
<i>Сведения об авторах</i> .....	88
<i>Информация для авторов</i> <i>«Вестника Ивановского государственного университета»</i> .....	91

**CONTENTS**

---

---

**Biology**

<b>Barinov S. N.</b> Inventory of a species list of lampreys and fishes of the Ivanovo region .....	5
<b>Borisova E. A., Kurganov A. A., Lazareva O. G.</b> Lake Pestyakovskoe — the natural monument of Ivanovo region.....	10
<b>Zaripov V. N., Barinova M. O.</b> Development of physiological researches in Ivanovo state university.....	18
<b>Isaev V. A.</b> Entomological researches and biological education in Ivanovo region (1918—2017) .....	21
<b>Mineeva L. Yu., Borisova I. N., Bugayenko L. S.</b> The current state of the collections of plants in Botanical garden of Ivanovo state University .....	29
<b>Sivukhin A. N.</b> Influence of various concentrations of lead nitrate on soil microbiot .....	33

**Chemistry**

<b>Volkova T. G., Talanova I. O.</b> Intermolecular interactions in the dimer of the alanine .....	38
<b>Krylov E. N., Vaganova S. V.</b> Quantum-chemical relative nucleophilicity of polymethyl benzenes as a descriptor of their reaction ability under bromination in ambience of AcOH .....	42
<b>Krylov E. N., Kildyushova S. S.</b> Reaction ability of aryl sulfonyl phthalimides at their interaction with aliphatic amines .....	49

**Mathematics**

<b>Vaganov S. E.</b> Adaptive method for images zooming .....	59
<b>Vialov A. F.</b> Simplex algorithm and a fully degenerate problem .....	62
<b>Golubev V. D., Khashin S. I.</b> Frobenius pseudoprime without big divisors .....	65
<b>Kosarev N. G., Turtin D. V.</b> On one solution's estimate of system with minimal growth in parameter .....	68
<b>Moldavanskii D. I.</b> On the finite residuality of some one-relator groups .....	76
<b>Khashina Yu. A.</b> Representation biquadratic function as sum or difference of squares .....	84
<i>Information about the authors</i> .....	88
<i>Information for the authors of «Ivanovo State University Bulletin»</i> .....	91

**ВЕСТНИК  
ИВАНОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА**

**Серия «Естественные, общественные науки»  
2018. Вып. 2. Биология. Химия. Физика. Математика**

Директор издательства *Л. В. Михеева*  
Редакторы *О. В. Боронина, В. А. Киселева*  
Технический редактор *И. С. Сибирева*  
Компьютерная верстка *Т. Б. Земсковой*

Дата выхода в свет 28.09.2018 г.

Формат  $70 \times 108^{1/16}$ . Бумага писчая. Печать плоская.  
Усл. печ. л. 8,5. Уч.-изд. л. 6,0. Тираж 300 экз. Заказ № 149.

Издательство «Ивановский государственный университет»

✉ 153025 Иваново, ул. Ермака, 39

☎ (4932) 93-43-41. E-mail: [publisher@ivanovo.ac.ru](mailto:publisher@ivanovo.ac.ru)



## ИНВЕНТАРИЗАЦИЯ ВИДОВОГО СПИСКА МИНОГ И РЫБ ИВАНОВСКОЙ ОБЛАСТИ

Фауна миног и рыб Ивановской области составляет достаточно обширный список. С момента последней инвентаризации [2] прошло уже более 10 лет. С тех пор появились новые фаунистические данные, законодательство в сфере охраны природы претерпело определенные изменения, следовательно, сформировалась необходимость провести новую инвентаризацию списка и уточнить современные статусы рассматриваемых видов.

**Ключевые слова:** инвентаризация видового списка, миноги, рыбы, виды-интродуценты, Красный список, Красная книга, Ивановская область.

The fauna of lampreys and fishes of the Ivanovo region is quite an extensive list, since last inventory [2] it has been more than 10 years. Since then, there have been new faunal data, legislation in the field of nature protection has undergone some changes, therefore, there was a need to conduct a new inventory of the list and clarify the current status of the species under consideration.

**Key words:** inventory of species list, lampreys, fishes, species-introduced, Red list, Red book, Ivanovo region.

Рыбы являются сложным для изучения комплексом видов, так как относятся к различным экологическим группам, разнообразны по предпочитаемым местам обитания, и для изучения численности и распределения необходимо применять разнообразные методики учета и специализированные орудия лова. Поэтому сведений по некоторым видам рыб крайне мало.

Видовые названия животных приводятся в соответствии с общедоступной информационной системой и интегрированной базой данных по разнообразию позвоночных животных России, доступной в глобальной сети Интернет [6], для некоторых видов приводится второе латинское название, применительно к которому Красным списком Международным союзом охраны природы (далее — МСОП) [13] установлены категории охранного статуса (табл.).

### Видовой список миног и рыб Ивановской области

Видовое название	Статус пребывания на территории Ивановской обл.	Категории охранного статуса МСОП [13]
<b>Класс: CEPHALASPIDOMORPHI — МИНОГИ</b>		
<b>Сем. Petromyzontidae — Миноговые</b>		
Каспийская минога — <i>Caspiomyzon wagneri</i> (Kessler, 1870) [4, 6]	исчезнувший [Кк]	NT
Европейская ручьевая минога — <i>Lampetra planeri</i> (Bloch, 1784)	редкий [Кк]	LC

Продолжение табл.

Видовое название	Статус пребывания на территории Ивановской обл.	Категории охранного статуса МСОП [13]
<b>Класс: OSTEICHTHYES — ЛУЧЕПЕРЫЕ РЫБЫ (КОСТНЫЕ РЫБЫ)</b>		
<b>Сем. ACIPENSERIDAE Bonaparte, 1832 — Осетровые</b>		
Сибирский осетр — <i>Acipenser baerii</i> (Brandt, 1869) [7]	един. наход.	EN
Русский осетр — <i>Acipenser gueldenstaedtii</i> (Brandt, 1833) [4, 6]	исчезнувший [Кк]	CR
Стерлядь — <i>Acipenser ruthenus</i> (Linnaeus, 1758)	редкий [Кк]	VU
Северяга — <i>Acipenser stellatus</i> (Pallas, 1771) [4, 6]	исчезнувший [Кк]	CR
Белуга — <i>Huso huso</i> (Linnaeus, 1758) [4, 6]	исчезнувший [Кк]	CR
<b>Сем. ANGUILLIDAE Rafinesque, 1810 — Речные угри</b>		
Речной угорь — <i>Anguilla anguilla</i> (Linnaeus, 1758)	редкий [Кк]	CR
<b>Сем. CLUPEIDAE Cuvier, 1816 — Сельдевые</b>		
Каспийско-черноморский пузанок — <i>Alosa caspia</i> (Eichwald, 1838) [6]	исчезнувший	LC
Кесслеровская сельдь — <i>Alosa kessleri</i> (Grimm, 1887) [6]	исчезнувший	LC
Черноморско-каспийская тюлька — <i>Clupeonella cultriventris</i> (Nordmann, 1840) [1]	обычный	LC
<b>Сем. CYPRINIDAE Bonaparte, 1832 — Карповые</b>		
Синец — <i>Abramis ballerus</i> (Linnaeus, 1758) <i>Ballerus ballerus</i> (Blue Bream) [13]	обычный	LC
Лещ — <i>Abramis brama</i> (Linnaeus, 1758)	обычный	LC
Белоглазка — <i>Abramis sapa</i> (Pallas, 1814)	обычный	LC
Быстрянка — <i>Alburnoides bipunctatus</i> (Bloch, 1782)	редкий [Кк]	LC
Уклейка — <i>Alburnus alburnus</i> (Linnaeus, 1758)	обычный	LC
Пестрый толстолобик — <i>Aristichthys nobilis</i> (Richardson, 1846) [7] <i>Hypophthalmichthys nobilis</i> (Bighead Carp) [13]	един. наход.	DD
Обыкновенный жерех — <i>Aspius aspius</i> (Linnaeus, 1758)	обычный	LC
Густера — <i>Blicca bjoerkna</i> (Linnaeus, 1758)	обычный	LC
Серебряный карась — <i>Carassius auratus</i> (Linnaeus, 1758)	обычный	—
Золотой, или обыкновенный карась — <i>Carassius carassius</i> (Linnaeus, 1758)	обычный	LC
Волжский подуст — <i>Chondrostoma variable</i> (Jakowlew, 1870) <i>Chondrostoma nasus</i> (Nase) [13]	редкий [Кк]	LC
<i>Stenopharyngodon idella</i> (Valenciennes, 1844) — белый амур [7, 10]	един. наход.	—
Сазан, обыкновенный карп — <i>Cyprinus carpio</i> (Linnaeus, 1759)	обычный	VU
Пескарь — <i>Gobio gobio</i> (Linnaeus, 1758)	обычный	LC
Белый толстолобик — <i>Hypophthalmichthys molitrix</i> (Valenciennes, 1844) [7, 10]	един. наход.	NT
Верховка — <i>Leucaspis delineatus</i> (Heckel, 1843)	обычный	LC

Продолжение табл.

Видовое название	Статус пребывания на территории Ивановской обл.	Категории охранного статуса МСОП [13]
Язь — <i>Leuciscus idus</i> (Linnaeus, 1758)	обычный	LC
Елец — <i>Leuciscus leuciscus</i> (Linnaeus, 1758)	обычный	LC
Голавль — <i>Leuciscus cephalus</i> (Linnaeus, 1758)	обычный	LC
Чехонь — <i>Pelecus cultratus</i> (Linnaeus, 1758)	обычный	LC
Озерный голянь — <i>Phoxinus phoxinus</i> (Pallas, 1814)	редкий [Кк]	LC
Обыкновенный голянь — <i>Phoxinus phoxinus</i> (Linnaeus, 1758)	обычный	LC
Горчак — <i>Rhodeus sericeus</i> (Pallas, 1776) [7]	?	LC
Белоперый пескарь — <i>Romanogobio albipinnatus</i> (Lukasch, 1933) [7]	?	LC
Плотва — <i>Rutilus rutilus</i> (Linnaeus, 1758)	обычный	LC
Красноперка — <i>Scardinius erythrophthalmus</i> (Linnaeus, 1758)	обычный	LC
Линь — <i>Tinca tinca</i> (Linnaeus, 1758)	обычный	LC
<b>Сем. BALITORIDAE Swainson, 1839 — Балиториевые</b>		
Усатый голец — <i>Barbatula barbatula</i> (Linnaeus, 1758)	обычный	LC
<b>Сем. COBITIDAE Swainson, 1838 — Вьюновые</b>		
Обыкновенная щиповка — <i>Cobitis taenia</i> (Linnaeus, 1758)	обычный	LC
Сибирская щиповка — <i>Cobitis melanoleuca</i> (Nichols, 1925) [1]	?	LC
Вьюн — <i>Misgurnus fossilis</i> (Linnaeus, 1758)	обычный	LC
<b>Сем. SILURIDAE Cuvier, 1816 — Сомовые</b>		
Обыкновенный (европейский) сом — <i>Silurus glanis</i> (Linnaeus, 1758)	обычный	LC
<b>Сем. ESOCIDAE Cuvier, 1816 — Щуковые</b>		
Обыкновенная щука — <i>Esox lucius</i> (Linnaeus, 1758)	обычный	LC
<b>Сем. OSMERIDAE Regan, 1913 — Корюшковые</b>		
Европейская корюшка, снеток — <i>Osmerus eperlanus</i> (Linnaeus, 1758) [2, 7]	един. наход.	LC
<b>Сем. COREGONIDAE Cope, 1872 — Сиговые</b>		
Европейская ряпушка — <i>Coregonus albula</i> (Linnaeus, 1758) [7]	един. наход.	LC
Обыкновенный сиг — <i>Coregonus lavaretus</i> (Linnaeus, 1758) [12]	?	VU
Пелядь — <i>Coregonus peled</i> (Gmelin, 1789) [7, 10]	един. наход.	LC
Белорыбица, нельма — <i>Stenodus leucichthys</i> (Guldenstadt, 1772)	исчезнувший [Кк]	EW
<b>Сем. THYMALLIDAE Gill, 1884 — Хариусовые</b>		
Европейский хариус — <i>Thymallus thymallus</i> (Linnaeus, 1758)	редкий [Кк]	LC
<b>Сем. SALMONIDAE Rafinesque, 1815 — Лососевые</b>		
Кумжа — <i>Salmo trutta</i> (Linnaeus, 1758)	? [Кк]	LC
<b>Сем. LOTIDAE Jordan et Evermann, 1898 — Налимовые</b>		
Налим — <i>Lota lota</i> (Linnaeus, 1758)	обычный	LC
<b>Сем. POECILIIDAE Bonaparte, 1838 — Пецилиевые</b>		
Гуппи — <i>Poecilia reticulata</i> (Peters, 1859) [7]	?	—

Окончание табл.

Видовое название	Статус пребывания на территории Ивановской обл.	Категории охранного статуса МСОП [13]
<b>Сем. GASTEROSTEIDAE Bonaparte, 1832 — Колюшковые</b>		
Девятииглая колюшка — <i>Pungitius pungitius</i> (Linnaeus, 1758) [7]	?	LC
<b>Сем. COTTIDAE Bonaparte, 1832 — Керчаковые</b>		
Обыкновенный подкаменщик — <i>Cottus gobio</i> (Linnaeus, 1758)	редкий [Кк]	LC
<b>Сем. PERCIDAE Cuvier, 1816 — Окуневые</b>		
Обыкновенный ерш — <i>Gymnocephalus cernuus</i> (Linnaeus, 1758)	обычный	LC
Речной окунь — <i>Perca fluviatilis</i> (Linnaeus, 1758)	обычный	LC
Обыкновенный судак — <i>Stizostedion lucioperca</i> (Linnaeus, 1758)	обычный	LC
Волжский судак, берш — <i>Stizostedion volgense</i> (Gmelin, 1788) <i>Sander volgensis</i> (Gmelin, 1789) [13]	обычный	LC
<b>Сем. ELEOTRIDIDAE Regan, 1911 — Головешковые</b>		
Головешка-ротан — <i>Perccottus glenii</i> (Dybowski, 1877)	обычный	—
<b>Сем. GOBIDAE Bonaparte, 1832 — Бычковые</b>		
Бычок-песочник, речной бычок — <i>Neogobius fluviatilis</i> (Pallas, 1814) [8]	един. наход.	LC
Звездчатая пуголовка — <i>Benthophilus stellatus</i> (Sauvage, 1874) [5, 11]	един. наход.	LC
Каспийский бычок-головач — <i>Neogobius iljini</i> (Vasiljeva et Vasiljev, 1996) [7] <i>Ponticola goralp</i> (Caspian Bighead Goby) [13]	?	LC
Бычок-кругляк, черноротый бычок — <i>Neogobius melanostomus</i> (Pallas, 1814) [3]	един. наход.	LC
Бычок-цуцик, мраморный тупоносый бычок — <i>Proterorhinus marmoratus</i> (Pallas, 1814) [7]	?	LC
<b>Сем. PLEURONECTIDAE — Камбаловые</b>		
Европейская речная камбала — <i>Platichthys flesus</i> (Linnaeus, 1758) [7]	един. наход.	LC

*Примечания:*

Статус пребывания вида на территории Ивановской области: исчезнувший — обитал ранее, но исчез в последнее время; редкий — включен в Красную книгу Ивановской области [9] с разными категориями редкости; обычный — встречается во многих водоемах области; ? — требуется уточнение статуса пребывания или видовой принадлежности (обнаруживался у границ области); един. наход. — единичные находки.

В Красном списке МСОП [13] категории охранного статуса: EW (Extinct in the Wild) — исчезнувшие в дикой природе; CR (Critically Endangered) — в критической опасности; EN (Endangered) — исчезающий; VU (Vulnerable) — находится в уязвимом состоянии; NT (Near Threatened) — близок к уязвимому состоянию; LC (Least Concern) — таксон минимального риска; DD (Data Deficient) — данных не достаточно; «—» — отсутствует в Красном списке.

Все осетрообразные и угорь внесены в Перечень видов животных и растений, подпадающих под действие Конвенции о международной торговле видами дикой фауны и флоры, находящимися под угрозой исчезновения (СИТЕС).

С позиций систематики приведенные в списке виды относятся к двум классам позвоночных животных. Следовательно, класс миног в фауне Ивановской области представлен 2 видами (один отнесен к исчезнувшим с территории области видам), а класс лучеперых рыб — 56 видами (6 из которых отнесены к исчезнувшим с территории области видам). По кумже вопрос остается открытым. Анализ данных усложняется тем, что в реки Волгу и Оку, вероятно, проникали особи радужной форели из рыбоводческих хозяйств [7].

Таким образом, обновленный список видов миног и рыб Ивановской области, включая обитавших ранее, составляет 58 видов. Предыдущий список содержал 48 видов.

Наиболее многочисленной группой является семейство Карповых (25 видов). Данный список в ближайшее время, вероятно, будет расширен за счет уточнения статусов пребывания еще целого ряда видов (не менее 8) на территории Ивановской области. Список видов-вселенцев (инвазионные виды, интродуценты) следует детально проанализировать в дальнейшем.

*Автор благодарит всех коллег, поделившихся своими фаунистическими наблюдениями.*

#### **Библиографический список**

1. Атлас пресноводных рыб России : в 2 т. / под ред. Ю. С. Решетникова. М. : Наука, 2002. Т. 1. 379 с.
2. *Баринов С. Н.* Современное состояние фауны рыб и рыбообразных Ивановской области // Экологические проблемы уникальных природных и антропогенных ландшафтов : материалы Всероссийской научно-практической конференции. Ярославль, 2004. С. 131—136.
3. *Баринов С. Н., Торопов М. Ю.* Новый вид-интродуцент (бычок-кругляк *Neogobius melanostomus*) на территории Ивановской области // Молодая наука в классическом университете. Иваново : Иван. гос. ун-т, 2005. С. 31.
4. *Берг Л. С.* Рыбы пресных вод СССР и сопредельных стран. М. ; Л. : Изд-во АН СССР, 1948. Т. 1. 468 с.
5. *Евланов И. А., Козловский С. В., Антонов П. И.* Кадастр рыб Самарской области. Тольятти : ИЭВБ РАН, 1998. 222 с.
6. Интегрированная база данных (БД) по разнообразию позвоночных животных России. URL: <http://www.sevin.ru/vertebrates> (дата обращения: 05.02.2018).
7. *Клевакин А. А., Блинов Ю. В., Минин А. Е., Пестова Ф. С., Постнов Д. И.* Рыболовство в Нижегородской области / Комитет охраны природы и управления природопользованием Нижегородской области, Нижегородская лаборатория ФГНУ ГосНИОРХ. Н. Новгород, 2005. 96 с.
8. *Клевакин А. А., Логинов В. В.* Встречаемость чужеродных видов рыб на водозаборах реки Ока, Горьковского и Чебоксарского водохранилищ // Эколого-биологические особенности Чебоксарского водохранилища и водоемов его бассейна. СПб., 2015. С. 29—55.
9. Красная книга Ивановской области. Т. 1 : Животные / под ред. В. Н. Мельникова. 2-е изд. Иваново : Научный консультант, 2017. 240 с.
10. *Шамберев М. М.* За охрану и размножение рыбных ресурсов // Природа Костромской области и ее охрана. Ярославль. 1976. Вып. 2. С. 76—83.
11. *Яковлев В. Н., Слынько Ю. В., Кияшко В. И.* Аннотированный каталог круглоротых и рыб водоемов бассейна Верхней Волги // Экологические проблемы Верхней Волги. Ярославль : Изд-во ЯГТУ, 2001. С. 53—69.
12. *Яковлев В. Н., Слынько Ю. В., Кияшко В. И.* Таксономическое разнообразие ихтиофауны // Экологические проблемы Верхней Волги. Ярославль : Изд-во ЯГТУ, 2001. 427 с.
13. The IUCN Red List of Threatened Species. Version 2017-3. URL: [www.iucnredlist.org](http://www.iucnredlist.org) (дата обращения: 24.01.2018).

УДК 581.9 (470.315)

*Е. А. Борисова, А. А. Курганов, О. Г. Лазарева***ОЗЕРО ПЕСТЯКОВСКОЕ — ПАМЯТНИК ПРИРОДЫ  
ИВАНОВСКОЙ ОБЛАСТИ**

Приводятся данные о результатах обследования памятника природы Ивановской области «Озеро Пестяковское». Описано современное состояние флоры и фауны. В составе флоры выявлено 216 видов сосудистых растений, относящихся к 3 отделам, 4 классам, 58 семействам, 135 родам. В составе фауны отмечено 5 видов земноводных, 3 вида пресмыкающихся, 42 вида птиц, 3 вида млекопитающих. Охарактеризованы редкие виды растений и животных. Приводятся сведения о заносных и инвазионных видах растений. На основе проведенных исследований рекомендуется сохранить для Пестяковского озера статус особо охраняемой природной территории регионального значения.

**Ключевые слова:** особо охраняемые природные территории, флора, фауна, редкие виды, заносные и инвазионные растения, Ивановская область.

Results of floristic and faunistic studies of the natural monument of the Ivanovo region «Lake Pestyakovskoe» are discussed. There are 216 vascular plant species in flora, belongs to 3 divisions, 4 classes, 58 families and 135 genera. The vertebrate fauna includes 5 amphibian species, 3 reptiles species, 42 bird species and 3 mammal species. Rare plant and animal species are briefly characterized. Some data about alien and invasion plant species are presented. Current scientific studies confirmed the great value of the protected area to nature preservation.

**Key words:** specially protected natural areas, flora, fauna, rare species, alien and invasion plant species, Ivanovo region.

Изучение особо охраняемых природных территорий (ООПТ) в настоящее время остается одним из актуальных направлений биолого-экологических исследований. Основу сети ООПТ Ивановской области составляют водно-болотные комплексы, изучение которых в рамках долгосрочной целевой программы проводится с 2013 г. [1—5]. Статус ООПТ регионального и местного значения имеют и крупные водохранилища нашего региона. Например, Увельское, «Маркуша» и «Щуковское» (Комсомольский район), водохранилище в г. Кохме (Ивановский район), водохранилище в Гридинском лесничестве, озеро Вазаль (Южский район). Озеро Пестяковское — тоже искусственный водоем, образованный в результате строительства дамбы на р. Пурешок. Он представляет собой водохранилище, но жители пос. Пестяки называют его озером, и это название за ним закрепилось. Пестяковское озеро расположено на южной окраине пос. Пестяки. Это крупный (наибольшая длина составляет 764 м, ширина — 292 м, площадь акватории — 100 га) и глубокий водоем Ивановской области, который подпитывается многочисленными родниками. Наибольшая глубина составляет 7 м, средняя — 1,5 м. Вода в нем чистая, по химическому составу гидрокарбонатная хлоридно-сульфатная, кальциево-магниевая, с сухим остатком. Дно вязкое и глинистое, с небольшим слоем сапропеля. Озеро получило статус памятника природы в 1975 г. (Решение Ивановского облисполкома № 2/6 от 27.01.1975 г.).

В июле 2017 г. были обследованы берега Пестяковского озера и прилегающие к нему территории. Были описаны растительные сообщества, выявлен

видовой состав сосудистых растений, составлен полный аннотированный конспект флоры. Проводились экскурсии с целью изучения фауны этого водного объекта. Особое внимание уделялось редким видам животных и растений. Собранный гербарный материал передан в фонды Гербария им. Д. П. Сырейщикова МГУ (MW), дублиеты хранятся в гербарии Ивановского государственного университета (IVGU).

На плотине р. Пурешок прежде была водяная мельница, уровень воды регулировался мельником. Старая плотина была песчаной, ее неоднократно прорывало. В 1992 г. ее разобрали, построив дамбу шириной 10 м, длиной 220 м. Со стороны озера откосы плотины укрепили бетонными плитами.

Северный и западный берега озера Пестяковское холмистые, с уклоном 5—14°, южный и восточный берега низкие, заболоченные, местами очень зыбкие. Прибрежная полоса со стороны ул. Набережная занята частными домами с огородами.

По берегу озера со стороны ул. Набережная высажены аллеи тополя сибирского (*Populus × sibirica*), одиночные экземпляры ивы остролистной (*Salix acutifolia*), березы белой (*Betula pubescens*). Некоторые экземпляры тополей и ив старовозрастные (более 100 лет), с мощными толстыми стволами и шатровидными кронами. Вдоль берега на ул. Набережная посажена аллея из ясеня пенсильванского (*Fraxinus pennsylvanica*), сформированы газоны и цветники, имеется памятный знак Князю Пожарскому и пестяковцам, участвовавшим в ополчении 1612 г. На берегах озера имеются несколько обустроенных родников.

На северо-западном берегу водохранилища растет старовозрастный черноольховник высокотравный с рябиной обыкновенной (*Sorbus aucuparia*), крушиной ломкой (*Frangula alnus*) и черемухой обыкновенной (*Padus avium*) в подлеске. В составе древостоя встречается береза повислая (*Betula pendula*). В травяном покрове господствуют крапива двудомная (*Urtica dioica*), тростник южный (*Phragmites australis*), кипрей мохнатый (*Epilobium hirsutum*), валериана лекарственная (*Valeriana officinalis*) и другие виды.

Водная растительность озера бедная, по визуальной оценке надводными растениями занята 10 % акватории, погруженными — 5—10 %. Среди гидрофитов встречаются водокрас обыкновенный (*Hydrocharis morsus-ranae*), ряска малая (*Lemna minor*), многокоренник обыкновенный (*Spirodela polyrrhiza*), горец земноводный (*Polygonum amphibium*). В северо-восточной и восточной частях на мелководьях озеро сильно заросло водными растениями.

Прибрежно-водная растительность представлена группировками манников большого (*Glyceria maxima*) и наплывающего (*G. fluitans*), тростника южного (*Phragmites australis*), болотницы болотной (*Eleocharis palustris*), камыша лесного (*Scirpus sylvaticus*). Встречаются группы ситника развесистого (*Juncus effusus*), рогоза широколистного (*Typha latifolia*), частухи подорожниковой (*Alisma plantago-aquatica*), череды трехраздельной (*Bidens tripartita*) и поникшей (*B. cernua*), щавеля водного (*Rumex aquaticus*) и прибрежного (*R. hydrolopathum*).

В результате проведенных исследований к 2018 г. в составе флоры памятника природы «Озеро Пестяковское» было выявлено 216 видов сосудистых растений, которые относятся 3 отделам, 4 классам, 58 семействам и 135 родам. Это высокий уровень биологического разнообразия. В систематической структуре флоры по числу видов значительно преобладают цветковые растения (*Angiospermae*) — 209 видов, отдел папоротниковидные (*Polypodiophyta*) представлен 4 видами, отдел хвощевидные (*Equisetophyta*) — 3 видами.

Ведущими семействами флоры являются сложноцветные (*Compositae*) — 26 видов, злаки (*Gramineae*) — 25, розоцветные (*Rosaceae*) — 13. К крупным родам относятся осока (*Carex*) — 9 видов, ива (*Salix*), щавель (*Rumex*) — по 8 видов, мятлик (*Poa*), лютик (*Ranunculus*) — по 5 видов. Основные пропорции флоры типичны для бореальных областей.

Наибольший интерес представляют редкие виды растений, найденные по берегам этого водоема. Всего обнаружено более 10 редких видов флоры, среди них 6 включены в дополнительный список региональной Красной книги [9]. Ниже приводим их список с краткими комментариями.

*Вейник незамеченный* (*Calamagrostis neglecta* (Ehrh.) Gaertn., Mey. et Schreb) — вид низинных болот и топких заболоченных берегов водоемов, на территории Ивановской области редок, распространен неравномерно. Вдоль западного берега озера встречается небольшими разреженными группами по топким местам и на мелководьях, генеративных побегов формирует немного.

*Леерсия рисовидная* (*Leersia oryzoides* (L.) Swartz) в Ивановской области встречается спорадически, тяготея к крупным рекам, известна в Пучежском, Фурмановском, Южском, Юрьевоцком районах, цветение наблюдается не ежегодно. Редкие куртинки вегетирующих растений обнаружены на западном берегу озера, по заболоченным местам.

*Ирис ложноаировый* (*Iris pseudacorus* L.) встречается группами по берегам озера и в сырых понижениях, обильно цветет и плодоносит. Вид заслуживает охраны как декоративное растение.

*Ива филиколистная* (*Salix phylicifolia* L.) — вид низинных и переходных болот, на территории области встречается изредка, вероятно, во всех муниципальных районах. Одиночные кусты найдены на северо-западном берегу озера в сырых понижениях среди высокотравья.

*Гвоздика пышная* (*Dianthus superbus* L.) отмечена на дамбе, реже встречается на лугах по берегу озера. Очень декоративный вид, спорадически встречается во всех районах области.

*Колокольчик широколистный* (*Campanula latifolia* L.), группа цветущих растений обнаружена большая на берегу со стороны ул. Набережная. По территории Ивановской области распространен неравномерно, крупные популяции отмечены в Кинешемском, Комсомольском и Фурмановском районах. Этот вид включен в Красную книгу Владимирской области.

Особо стоит отметить находки двух очень редких видов местной флоры, приуроченных к ключевым местообитаниям. Это звездчатка топяная и кипрей розовый.

*Звездчатка топяная* (*Stellaria alsine*) найдена на западном берегу озера в черноольшанике среди высокотравья (*Phragmites australis*, *Filipendula ulmaria*, *Equisetum fluviatile*, *Comarum palustre*, *Cardamine amara* и др.) и зеленых мхов, на сырой, торфянистой почве, а также на топком месте близ уреза озерной воды. Это третье достоверно известное местонахождение вида в Ивановской области. Ранее он отмечался в Ивановском районе (гербарный сбор конца XIX в. в фондах MW), в 2016 г. найден в окрестностях д. Большая Протасиха Пучежского района [6]. Звездчатка топяная относится к числу редких видов для флоры средней полосы Европейской России в целом [13].

*Кипрей розовый* (*Epilobium roseum*), небольшая группа найдена на западном берегу озера, в черноольшанике. Вегетирующие растения одиночно и небольшими скоплениями встречались вдоль ручья, впадающего в озеро, а также на топких местах с выходом грунтовых вод на поверхность. Распространение вида в области нуждается в дальнейшем изучении.

Среди других редких растений по берегам озера встречаются зубровка душистая (*Hierochloa odorata*), осоки двутычинковая (*Carex diandra*) и ежисто-колючая (*C. echinata*), незабудка дернистая (*Myosotis cespitosa*), вероники поточная (*Veronica beccabunga*) и щитковидная (*V. scutellata*), подмаренник трехнадрезанный (*Galium trifidum*).

Данный водоем граничит с жилой застройкой поселка, огородами и автомобильными дорогами. Поэтому в составе флоры присутствуют многие заносные виды растений. Обычно встречаются кипрей железистостебельный (*Epilobium adenocaulon*), ситник тонкий (*Juncus tenuis*). По берегам отмечены группы облепихи крушиновидной (*Hippophae rhamnoides*), ирги колосистой (*Amelanchier spicata*), у дорог обычно встречается мелколепестник канадский (*Conyza canadensis*), в воде озера группы образует элодея канадская (*Elodea canadensis*). Эти виды являются инвазионными для Верхневолжского региона [17].

Среди редких заносных видов на склонах берегов озера отмечены чернокорень лекарственный (*Cynoglossum officinale*) и группы рейнвуртии богемской (*Reynoutria × bohemica*).

**Животный мир.** Фауна позвоночных животных Пестяковского озера и его окрестностей разнообразна, что обусловлено мозаичностью условий береговой зоны и прилегающих к водоему участков как по характеру освещенности, рельефа, почв, растительности, увлажнения, так и по степени антропогенного воздействия. Поскольку многим позвоночным животным свойственны высокий уровень подвижности, большие радиусы индивидуальной активности, смена в течение года мест обитания, разнообразие условий делают местность у озера привлекательной для многих видов.

В результате исследований на акватории, в береговой полосе и в ближайших окрестностях Пестяковского озера было выявлено 5 видов земноводных, 3 вида пресмыкающихся, 42 вида птиц и 3 вида млекопитающих.

Из земноводных, представленных отрядом Бесхвостые (Апуга), наиболее многочисленна травяная лягушка (*Rana temporaria*). Особенно высока плотность ее населения в родниковых и заболоченных участках высокотравного черноольховника на южном берегу озера (местами достигает сотен особей на 100 м<sup>2</sup>). Остромордая лягушка (*Rana arvalis*) встречается как в участках с разреженной древесно-кустарниковой растительностью, так и в открытых местообитаниях, но по численности она уступает травяной лягушке. Прудовая лягушка (*Pelophylax lessonae*) обитает в мелководной юго-восточной части озера, но имеет более высокую численность выше по течению р. Пурешок. В заболоченных и сильно заросших водной растительностью разливах (старицах) реки, в прудах (в районе улиц Заозерных), в карьерах южнее озера численность вида достигает 20 экземпляров на 100 м<sup>2</sup>. Комплекс зеленых лягушек может включать еще 2 вида — озерную и съедобную, причем более вероятно встречается съедобная лягушка (*Pelophylax esculentus*) [10]. Она внесена в Красную книгу Ивановской области [8]. Этот вид был обнаружен на территории Южского района, соседнего с Пестяковским: в 2005 г. — в окрестностях пос. Холуй, в 2012 г. — в пруду д. Верхнее Костяево (популяционная система «*esculenta*» — «*lessonae*») [8, 12, 14]. Поэтому для уточнения видового состава гибридогенного комплекса *Pelophylax kl. esculentus* в окрестностях Пестяковского озера необходимы исследования популяционных систем зеленых лягушек на карьерах, в прудах и пойменных водоемах р. Пурешок.

Серая жаба (*Bufo bufo*) отмечена в ближайших окрестностях озера — на опушках и обочинах грунтовых дорог. Этот вид более характерен для южного берега озера, участков березняков. Обыкновенная чесночница (*Pelobates fuscus*) — вид с ночной активностью, ведет роющий образ жизни, требователен к механическому составу почв. Ранее был отмечен на окраине пос. Пестяки [15]. Заводы и затоны, заросшие рогозом, хвощом, ряской, в пойме р. Пурешок и восточной части озера привлекательны не только для зеленых лягушек, но и для сеголетков всех выявленных на территории ООПТ видов земноводных. Они являются местами размножения лягушек и жаб.

Из 6 видов пресмыкающихся Ивановской области в окрестностях озера выявлено 3 вида из отряда Чешуйчатые (Squamata). Это живородящая ящерица (*Lacerta vivipara* или *Zootoca vivipara*), обыкновенный уж (*Natrix natrix*) и обыкновенная гадюка (*Vipera berus*). Последний вид редок в окрестностях озера, испытывающих антропогенное, в том числе рекреационное воздействие. Обыкновенный уж обычен, встречается практически по всей береговой полосе. Многие особи отмечены в воде, где они могут охотиться на земноводных и рыб, а также использовать водотоки для миграций. Ужи отмечены даже в зонах отдыха вдоль ул. Набережной. Наиболее привлекательны для них неглубокие зарастающие пойменные водоемы, с мозаичными условиями освещенности, рельефа, прибрежной растительности, а также территории вблизи строений и огородов на берегу озера. Живородящая ящерица — обычный вид, но в силу мелких размеров реже попадает на глаза. Отмечен в пойме, в районе дамбы, а также в захламленных участках у строений, на огородах, в березняке.

Пестяковский район наряду с Южским характеризуется более высокой численностью и разнообразием пресмыкающихся по сравнению с другими районами Ивановской области. На его территории встречаются также прыткая ящерица, веретеница и медянка [11, 15]. Последние 2 вида включены в Красную книгу Ивановской области [8], однако на территории ООПТ «Озеро Пестяковское» не были отмечены.

Птицы — самая богатая по видовому разнообразию группа позвоночных животных ООПТ. Непосредственно с крупным водоемом — Пестяковское озеро — связаны птицы 4-х отрядов, и прямо или косвенно (с околотовными биотопами) — еще нескольких отрядов.

Отряд Поганкообразные (Podicipediformes). На озере отмечено 3 взрослые и 4 молодые особи (1—2 выводка) чомги, или большой поганки (*Podiceps cristatus*). Эта нарядная (с черно-рыжим «воротником» из перьев на голове), интересная водоплавающая птица размерами с утку, прекрасно ныряет, погружаясь под воду целиком. Охотится на рыб и речных раков (наличие которых в водоеме свидетельствует о чистоте воды). Держатся птицы на воде, там же устраивают плавучее гнездо. Отмечены на основной акватории водохранилища. В целом чомга считается обычным (по сравнению с другими четырьмя видами поганок, три из которых включены в Красную книгу Ивановской области) гнездящимся видом на территории Ивановской области, но чаще отмечается в период весенних миграций [7, 8].

Также были отмечены 4 особи красношейных поганок, внесенных в Красную книгу Ивановской области [8]. Этот вид предпочитает селиться на небольших стоячих водоемах, реже — крупных озерах. Мы наблюдали, скорее всего, уже самостоятельных птенцов, которые предпочитают держаться на открытой воде больших озер [16].

Отряд Аистообразные (Ciconiiformes) представлен одним видом — серой цаплей (*Ardea cinerea*). Это крупная птица пепельно-серой окраски, с более светлой головой, шеей и брюхом, черными крыльями. Нами регулярно отмечалась одна взрослая особь на берегу большого речного затона в восточной части озера, реже — на южном берегу озера. В последние годы серая цапля регистрируется местными жителями ежегодно. На территории Ивановской области вид является редким [7].

Из отряда Гусеобразных (Anseriformes) наиболее распространенным видом является кряква (*Anas platyrhynchos*), самки с выводками отмечались в прибрежных участках. Более редкими являются чирок-трескунок (*Anas querquedula*) и красноголовый нырок (*Aythya ferina*).

К самым многочисленным околотовидным птицам Пестяковского озера относятся виды семейства чайковых из отряда Ржанкообразных (Charadriiformes). Доминирует озерная чайка (*Larus ridibundus*). Во время отдыха птиц на поверхности озера насчитывалось до нескольких десятков особей этого вида одновременно. Обычна сизая чайка (*Larus canus*). Были отмечены 3 пары речных крачек (*Sterna hirundo*) над озером и выше по течению реки. Из семейства бекасовых для прибрежной части озера характерен кулик-перевозчик (*Actitis hypoleucos*), было отмечено 4 птицы.

Отряд Соколообразные (Falconiformes) представлен черным коршуном (*Milvus migrans*). Вид обычно поселяется в пойменных лесах, в окрестностях крупных озер и водохранилищ. Был отмечен в полете над берегами озера, также над рекой выше по течению.

Над водной гладью озера и над прилежащими открытыми участками весьма обычны птицы, кормящиеся в воздухе. Это черный стриж (*Apus apus*) из отряда Стрижеобразных (Apodiformes), городская ласточка (*Delichon urbica*) и (более редкая) береговушка (*Riparia riparia*) из семейства ласточковых отряда Воробьинообразных (Passeriformes). Из отряда Голубеобразных (Columbiformes) в лесу с южной стороны озера обитает вяхирь (*Columba palumbus*). Из Дятлообразных (Piciformes) с выкоствольными лиственными лесами связаны желна, или черный дятел (*Dryocopus martius*) и пестрый дятел (*Dendrocopos major*), который более обычен в юго-западной части ООПТ (в черноольховнике, березняке и лиственных лесах с примесью других пород деревьев, а также в сосновых посадках южнее озера). Преимущественно в высокоствольных лиственных, смешанных лесах и на их опушках отмечены и некоторые Воробьинообразные. Это иволга (*Oriolus oriolus*), зеленая пересмешка (*Hippolais icterina*), зеленая пеночка (*Phylloscopus trochiloides*), дрозды певчий (*Turdus philomelos*) и белобровик (*Turdus iliacus*), большая синица (*Parus major*), поползень (*Sitta europaea*).

Для открытых прибрежных участков характерны белая трясогузка (*Motacilla alba*), полевой воробей (*Passer montanus*), нередко — варакушка (*Luscinia svecica*). В пойменных древесно-кустарниковых сообществах обычны сорока (*Pica pica*), варакушка (*Luscinia svecica*), чечевица (*Carpodacus erythrinus*), виды семейства славковых — садовая славка (*Sylvia borin*), болотная камышевка (*Acrocephalus palustris*), садовая камышевка (*Acrocephalus dumetorum*), реже барсучок (*Acrocephalus schoenobaenus*) и речной сверчок (*Locustella fluviatilis*); из семейства овсянковых изредка встречается камышовая овсянка (*Emberiza schoeniclus*).

В условиях сочетания небольших строений с разреженным древостоем (в том числе искусственными посадками), в котором присутствуют старовоз-

растные деревья, обитают садовая камышевка, славки садовая, серая (*Sylvia communis*) и черноголовая (*Sylvia atricapilla*), пеночка-весничка (*Phylloscopus trochilus*), из семейства вьюрковых — зеленушка (*Chloris chloris*) и щегол (*Carduelis carduelis*).

На территории ООПТ слабо представлены или не представлены вовсе отряд Курообразные, из отряда Воробьинообразных — семейства жаворонковые, скворцовые, трясогузковые, мухоловковые, синицевые, врановые (при этом на территории поселка отмечены 3 вида врановых: сорока (*Pica pica*), серая ворона (*Corvus cornix*) и галка (*Corvus monedula*). Мало видов из семейств дроздовых, вьюрковых, куликов. Слабо представлены экологические группы птиц хвойных (особенно темнохвойных) и темнохвойно-лиственных лесов, виды-дуплогнезники. Для более полного выявления видового состава птиц (особенно дневных хищных птиц и сов) требуются дополнительные исследования.

Фауна млекопитающих специально не изучалась. Можно предполагать обитание в окрестностях озера некоторых видов мелких грызунов (мыши, полевки) и насекомоядных (бурозубки, еж европейский), а также хищных млекопитающих семейства куньих. Весьма вероятно обитание нескольких видов рукокрылых, в том числе включенной в Красную книгу Ивановской области ночницы водяной (*Myotis daubentonii*), зарегистрированной в Пестяковском районе [8].

В результате обследований ООПТ был отмечен крот обыкновенный, или европейский (*Erinaceus europaeus*) из отряда Насекомоядные (Insectivora). Он найден только на хорошо дренированных участках в окрестностях озера. Из околотовной фауны характерны бобр обыкновенный (*Castor fiber*) и ондатра (*Ondatra zibethicus*) из отряда Грызунов (Rodentia), Ондатра селится по берегам рек, озер, болот. Бобр встречается в южной облесенной части озера и прилегающих участках. Медленно текущие речки, старицы, водохранилища, озера, карьеры относятся к типичным местообитаниям бобра, численность которого в последние десятилетия растет.

Пестяковское озеро является излюбленным местом отдыха жителей поселка и приезжающих. С ранней весны и до поздней осени здесь можно видеть отдыхающих и прогуливающихся людей, рыбаков, детей. Здесь обустроены места для купания и отдыха.

ООПТ «Пестяковское озеро» имеет большое средообразующее, гидрологическое, научно-просветительское, рекреационное, ресурсоохранное и эстетическое значение. Озеро важно для сохранения биоразнообразия региона, местообитаний редких видов растений и животных. Это ценный водный объект, источник чистой воды.

На основе проведенных исследований рекомендуется сохранить Пестяковскому озеру статус ООПТ регионального значения. В планируемой экологической сети региона данный объект входит в буферную зону. Контроль за соблюдением режима охраны ООПТ позволят поддерживать чистоту воды в озере, стабильность экосистем, определенный уровень биоразнообразия, охрану местообитаний редких видов растений и животных.

Пестяковское озеро относится к перспективным объектам области для развития экологического туризма и проведения эколого-просветительской, природоохранной работы.

Авторы выражают сердечную благодарность доценту ИГСХА М. П. Шилову за совместные полевые работы.

## Библиографический список

1. Борисова Е. А. Итоги изучения флоры и растительности Ивановской области // Вестник Ивановского государственного университета. Сер.: Естественные, общественные науки. 2014. № 2. С. 5—10.
2. Борисова Е. А., Шилов М. П., Щербаков А. В., Курганов А. А. Флора озер Савинского района Ивановской области // Бюллетень Брянского отделения Русского ботанического общества. 2013. № 2 (2). С. 20—27.
3. Борисова Е. А., Шилов М. П., Марков Д. С., Курганов А. А. Памятник природы Ивановской области «Озеро Заборье» // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. 2016. Т. 18, № 2—1. С. 47—50.
4. Борисова Е. А., Курганов А. А., Марков Д. С., Шилов М. П. Озеро Нельша Ивановской области // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. 2017. Т. 19, № 2—2. С. 229—233.
5. Борисова Е. А., Шилов М. П., Курганов А. А. Флора и растительность ООПТ Ивановской области «Озеро Шадрино» // Самарская Лука : проблемы региональной и глобальной экологии. 2017. Т. 26, № 3. С. 87—93.
6. Борисова Е. А., Курганов А. А., Шилов М. П. Находки новых и редких видов сосудистых растений в Ивановской области // Ботан. журн. 2017. Т. 102, № 11. С. 1563—1570.
7. Герасимов Ю. Н., Сальников Г. М., Буслаев С. В. Птицы Ивановской области. М., 2000. 125 с.
8. Красная книга Ивановской области. Т. 1 : Животные / под ред. В. Н. Мельникова. 2-е изд. Иваново : Научный консультант, 2017. 240 с.
9. Красная книга Ивановской области. Т. 2 : Растения и грибы / под ред. В. А. Исаева. Иваново : ПресСто, 2010. 192 с.
10. Лада Г. А., Боркин Л. Я., Литвинчук С. Н., Розанов Ю. М. Типы популяционных систем зеленых лягушек (*Rana esculenta* complex) на территории Русской равнины // Вопросы герпетологии : материалы IV съезда Герпетологического о-ва им. А. М. Никольского (12—17 октября 2009 г., Казань). Санкт-Петербург. 2011. С. 142—148.
11. Лазарева О. Г. Материалы по экологии видов земноводных и пресмыкающихся, занесенных в Красную книгу Ивановской области // Редкие животные и грибы : материалы по ведению Красной книги Ивановской области / под ред. В. А. Исаева. Иваново : ПресСто, 2012. С. 39—52.
12. Лазарева О. Г. Современное состояние изученности батрахофауны Ивановской области // Актуальные проблемы изучения и сохранения биоразнообразия Верхневолжья : материалы межрегиональной науч.-практ. конф. (Иваново, 28—29 сентября 2012 г.). Иваново : Иван. гос. ун-т, 2012. С. 24—33.
13. Маевский П. Ф. Флора средней полосы европейской части России. 11-е изд. М. : Тов-во науч. изд. КМК, 2014. 635 с.
14. Редкие животные : материалы по ведению Красной книги Ивановской области в 2012 г. / под ред. В. А. Исаева. Иваново : ПресСто, 2013. 144 с.
15. Редкие животные: материалы по ведению Красной книги Ивановской области в 2013—2014 гг. / под ред. В. Н. Мельникова. Иваново : ПресСто, 2015. 192 с.
16. Рябицев В. К. Птицы Урала, Приуралья и Западной Сибири : справочник-определитель. 3-е изд., испр. и доп. Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2008. 634 с.
17. Трмасова Н. А., Борисова Е. А., Борисова М. А. Сравнительный анализ инвазионного компонента во флоре 5-ти областей Верхневолжского региона // Ярославский педагогический вестник. 2013. Т. 3, № 4. С. 171—177.

УДК 612.1-612.8

*В. Н. Зарипов, М. О. Барина*

## РАЗВИТИЕ ФИЗИОЛОГИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ В ИВАНОВСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

Описываются основные вехи в развитии физиологических исследований в Ивановском государственном университете и этапы становления кафедры физиологии человека и животных.

**Ключевые слова:** Ивановский государственный университет, кафедра физиологии человека и животных, физиологические исследования.

The article describes the main milestones in the development of physiological research at the Ivanovo state university and the stages in the formation of the department of physiology of man and animals.

**Key words:** Ivanovo state university, department of human and animal physiology, physiological studies.

Почти 40 лет, а именно с 1980 г., претворяют в жизнь идеи Аристотеля, Везалия и Гарвея физиологи Ивановского государственного университета.

Многое сделано за эти годы: подготовлены сотни специалистов биологов-физиологов, защищены десятки кандидатских диссертаций, проработано множество сложнейших вопросов в области терморегуляции, водно-солевого обмена, вибрации и т. д. И все это сделано руками людей, работавших и учившихся в этих стенах.

Жизнь разбросала выпускников кафедры физиологии человека и животных по просторам России, но они, а в особенности те, кто продолжает работать на кафедре, помнят ее основателя и многие годы бессменного руководителя доктора биологических наук, профессора Юрия Ивановича Баженова, начавшего свой путь ученого-физиолога в Новосибирском государственном университете и приехавшего в Ивановский государственный университет организовывать кафедру. Кафедра физиологии человека и животных была организована в декабре 1980 г. В числе первых преподавателей кафедры были доценты Р. С. Гарштейн, Г. И. Погорелова, А. Т. Попель. На год позднее на кафедру пришли доцент Л. Н. Катаева, ассистент В. Н. Зарипов, доцент А. Ф. Богомолов. Преподавателями кафедры работают также ее выпускники, закончившие аспирантуру, — это доценты И. Ю. Лукьянов, Н. К. Кормилицына и М. О. Барина. В разные годы на кафедре работали преподаватели: профессор В. Н. Назаров, доцент А. Ф. Баженова и др.

Физиологи ИвГУ вели и продолжают вести научную деятельность по нескольким научным направлениям. Долгое время основной областью научных интересов было исследование физиологических механизмов адаптации. На базе университета было проведено 3 Всероссийских и Международная конференции по этой тематике. В 1983 г. была проведена Всероссийская школа по терморегуляции.

Долгое время основным научным направлением кафедры являлось изучение эколого-физиологических механизмов адаптации организмов к различным факторам среды, в том числе и к экстремальным. Первые физиологические исследования кафедры были посвящены, прежде всего, исследованиям

в области терморегуляции. Они затрагивали ряд аспектов — это адаптационные изменения центральных и периферических механизмов терморегуляции к острой и хронической гипоксии, к гипо- и гипертермическим условиям, роль адренергических механизмов в формировании выносливости и ряд других. Для этого на кафедре были введены в строй климатическая камера, барокамера для имитации высокогорных условий, а также ряд сложных физиологических установок. На основании проведенных в этом направлении исследований были успешно защищены ряд кандидатских диссертаций.

В рамках терморегуляционного направления проведено несколько термографических исследований. В частности, была изучена термотопография спины человека и на основании данных исследований построена классификационная схема, которая может быть использована для определения преморбидных состояний на разных стадиях развития остеохондроза.

Физиологические исследования проводились также по изучению адаптационных особенностей водно-солевого обмена и функции почек. На базе университета была организована научная конференция по этой проблеме с привлечением ведущих российских ученых в этой области.

С 90-х гг. прошлого столетия кафедра физиологии человека и животных стала активным участником межвузовской научно-исследовательской лаборатории «Биомеханика», в рамках которой совместно с подразделениями Ивановской государственной медицинской академии и Ивановского государственного энергетического университета занималась изучением влияния резонансной вибрации на функциональные системы и, прежде всего, на опорно-двигательный аппарат и систему кровообращения.

Известно, что колебательные процессы охватывают значительную часть природных явлений, имеют тесную связь с техникой. Среди факторов внешней среды и производственной в том числе, вибрация является наиболее распространенной. В сфере ее влияния находятся миллионы людей в различных отраслях народного хозяйства.

Физиологами университета проводились экспериментальные и клинические исследования по оценке физиологических реакций сосудистой, нервно-мышечной систем и костно-суставного аппарата в ответ на вибрационное воздействие.

Проведенные научные исследования доказали положительное влияние определенных частот и схем воздействия резонансной вибрации аппарата «Витафон» на кровообращение в конечностях. Установлены контакты с производственным объединением «Витафон» для продолжения исследования механизмов влияния на физиологические системы новых модификаций аппарата. Показано также, что вибрация, имеющая резонансный характер, оказывает особое влияние на живые структуры. Выявлены резонансные частоты некоторых живых структур, в частности, целостной голени человека и тазовой конечности белой крысы. Получены данные, характеризующие влияние изучаемого фактора на кровоток верхней и нижней конечностей человека. Исследованиями показана возможность использования резонансных режимов вибрации для диагностики сращения костей после переломов.

Особый интерес представляло действие на систему кровообращения резонансных частот вибрации. Резонансные частоты могут увеличивать сквозной кровоток и лимфоток, что позволяет снять отеки и увеличить скорость регенеративных процессов. Изменение местного капиллярного кровотока и его нормализация обеспечивает улучшение обмена веществ, особенно

газообмена между кровью и тканью, способствует устранению болевых и других патологических явлений. На базе кафедры была организована нейрохирургическая операционная, где совместно со специалистами Ивановской государственной медицинской академии и Ивановского госпиталя проводились перерезка и сшивание бедренного нерва крысы для определения влияния резонансных частот вибрации на скорость регенерационных процессов. На основании результатов проведенных исследований было успешно защищено несколько дипломных работ.

В начале нынешнего столетия сформировалось новое научное направление, связанное с изучением психофизиологических механизмов стрессоустойчивости к напряженной умственной работе и физической нагрузке. Совместно с Государственным научным центром — Институтом медико-биологических проблем и фирмой «Нейрософт», одной из ведущих российских производителей аппаратуры для медико-биологических исследований, была организована научно-исследовательская лаборатория «Исследование и оценка функциональных резервов организма у представителей различных профессиональных групп». Важным направлением для физиологов университета стало исследование адаптации студентов к учебной деятельности и сохранение их здоровья в условиях проводимой реформы системы образования. Результаты исследований, проведенные в этой области, вошли в научные труды I Съезда физиологов СНГ. Работы преподавателей кафедры получили признание на прошедшей в Ярославле Международной конференции «Актуальные проблемы адаптации организма в норме и патологии», в которой приняли участие представители 27 стран ближнего и дальнего зарубежья. В этом направлении развивается и творческое сотрудничество с Ивановской пожарно-спасательной академией ГПС МЧС России. Совместно с учеными академии был проведен ряд научных изысканий, затрагивающих проблему адаптации курсантов к предстоящим экстремальным условиям их профессиональной деятельности. На основании результатов этих исследований было опубликовано несколько работ.

Интеграция способствует развитию науки в результате обмена идеями и накопленным опытом. Немалую роль в этом процессе в настоящее время играет Интернет. В числе первых в университете сотрудники кафедры физиологии человека и животных создали свой собственный сайт, в котором были отражены все основные вехи кафедры, ее многоплановая учебная и научная деятельность.

Об успешной деятельности физиологов университета свидетельствуют многочисленные научные связи с такими учреждениями страны, как Институт физиологии им. И. П. Павлова РАН, Государственный научный центр — Институт медико-биологических проблем РАН, Институт эволюционной физиологии и морфологии им. И. М. Сеченова РАН, Институт биологии внутренних вод им. И. Д. Папанина РАН, Институт химической физики РАН, Институт физиологически активных веществ РАН и многими другими. Студенты имеют возможность выполнять свои дипломные работы на базе этих именитых институтов, а после окончания ИвГУ поступить в аспирантуру и продолжить научную деятельность на переднем крае мировой науки. Многие выпускники-физиологи защитили кандидатские диссертации и успешно работают в этих научных учреждениях.

Большое внимание все эти годы уделялось научно-исследовательской работе студентов. По этому направлению кафедра физиологии человека и животных занимала одно из ведущих мест в университете. Студенты-

физиологи принимали участие во многих международных и всероссийских конференциях и имеют более 200 публикаций по различным физиологическим направлениям. Они являются постоянными участниками проводимого в университете фестиваля «Молодая наука» и ежегодно занимают призовые места. Многие из студенческих научных работ выдвигались на Всероссийский конкурс. Студентка М. Ю. Неганова была признана лауреатом и награждена медалью Всероссийского конкурса студенческих научных работ, а доцент В. Н. Зарипов был награжден нагрудным знаком Министерства образования и науки «За развитие научно-исследовательской работы студентов». Продолжительное время работал созданный при кафедре физиологический кружок. Хорошей традицией является праздник «Посвящение в физиологи». Ежегодно, в начале декабря, студенты, начавшие специализироваться на кафедре, посвящаются в физиологи. В празднике участвуют все преподаватели и студенты кафедры. Традиционные номера художественной самодеятельности, песни под гитару, танцы, чаепитие — все это создает атмосферу радости и веселья.

Российская наука и образование в настоящее время испытывают значительную потребность в молодых и талантливых специалистах, и одним из ручейков, вливающих в могучую реку науки и просвещения, являются выпускники-физиологи Ивановского государственного университета.

УДК 595.7+378

*В. А. Исаев*

## **ЭНТОМОЛОГИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ И БИОЛОГИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ В ИВАНОВСКОЙ ОБЛАСТИ (1918—2017 гг.)**

Обсуждаются результаты энтомологических исследований и биологическое образование в Ивановской области (1918—2017 гг.)

**Ключевые слова:** медицинская, ветеринарная и сельскохозяйственная энтомология, паразитология, биологическое образование, Ивановская область.

Results of entomological researches and biological education in Ivanovo region (1918—2017) are discussed.

**Key words:** medical, veterinary and agrostructural entomology, parasitology, biological education, Ivanovo region.

Нет, как ни придумывай, а горького убеждения,  
что прошлое никогда, никогда не вернется,  
нельзя ничем ни прогнать, ни уничтожить!  
Напрасен труд бороться с неодолимой силой  
всесокрушающего времени!

*Э. Т. А. Гофман. «Серпионовы братья»*

Развитие научной энтомологии в Ивановской области насчитывает сто лет. Оно тесно связано с формированием нашей губернии в 1918 г. и последовавшим за этим развитием биологического образования. История этих процессов до настоящего времени слабо отражена в литературе, хотя актуальность темы

---

© Исаев В. А., 2018

в связи с развитием новых направлений в биологии в целом и в изучении насекомых как модельных объектов для исследований, в частности, очевидна.

Начиная с 1918 г., когда г. Иваново-Вознесенск стал губернским центром, берет свое начало история возникновения первого высшего учебного заведения города — Иваново-Вознесенского политехнического института.

«На работы в институт были приглашены ученые-зоологи: профессора Д. А. Ласточкин и А. Н. Казанский. Первый заведовал кафедрой зоологии (1918—1942), второй — кафедрой энтомологии (1918—1926). Они и являлись пионерами в изучении животного мира края. До 1917 г. опубликованы лишь отдельные сообщения, относящиеся к территории, которую занимает сейчас Ивановская область» [26, с. 195]. Внимание к энтомологии в такой трудный период (1918 г.) и создание первой кафедры в нашем крае свидетельствуют о важности развития этого направления и практической потребности в исследованиях разных групп насекомых в тот период в центре Нечерноземной зоны России. Для сравнения можно отметить, что из двух ныне сохранившихся в России кафедр энтомологии (в МГУ и СПбГУ), например, кафедра энтомологии Санкт-Петербургского университета была создана в 1919 г. [29], а кафедра энтомологии в МГУ им. М. В. Ломоносова была организована в 1925 г. [30].

Первая кафедра энтомологии в нашей губернии просуществовала недолго. Ее сотрудники: профессор А. А. Казанский и ассистент кафедры энтомологии А. И. Орлова занимались как научной, так и педагогической деятельностью, а также участвовали в практической работе по защите растений.

В последующие годы исследования в области общей, сельскохозяйственной, медицинской и ветеринарной энтомологии развивались на базе отдельных вузов, сформировавшихся из Иваново-Вознесенского политехнического института. Среди них прежде всего нужно выделить исследования на кафедрах зоологии и защиты растений в сельскохозяйственном институте, а также на кафедре биологии в медицинском институте в 40—60-е гг. XX в.

Сельскохозяйственная энтомология развивалась главным образом на кафедре защиты растений в ИСХИ, где профессор А. М. Соколов возглавлял работы по изучению вредителей лесов и полей. Среди них были и насекомые, экологию которых исследовали в последующие десятилетия Р. В. Иванова, В. К. Балуев, В. Г. Сергеев, М. Н. Ветрова и др.

После организации в 1947 г. кафедры зоологии Ивановского сельскохозяйственного института (ныне — ИГСХА им. Д. К. Беляева) ее возглавил В. К. Балуев. В дальнейшем он стал изучать жуков-щелкунов, личинки которых — проволочники — являются вредителями почв.

В ИГМИ в предвоенный период и 50—60-е гг. сформировалась школа медицинских энтомологов, что было связано с необходимостью ликвидации малярии, а также борьбой с природноочаговыми трансмиссивными заболеваниями, вспышки которых отмечались на территории области.

В период создания кафедры биологии в ИГМИ с 1932 по 1934 гг. ею по совместительству руководил профессор Д. А. Ласточкин, приехавший в 1918 г. из Риги и сыгравший в предвоенные годы важную роль в становлении агрофака Ивановского политехнического института, а затем сельхозинститута. Ассистентом кафедры биологии ИГМИ в тот период была В. П. Дербенева-Ухова (1902—1982), которая занималась изучением мух. Она была первым диптерологом, имевшим, с одной стороны, наши ивановские «корни» — дочь городского головы Иваново-Вознесенска (в 1894—1905 гг.) Павла Никаноровича Дербенева-Ухова (1854—1920), а с другой — предста-

вителем московской школы медицинских энтомологов (она стала в последующие годы доктором биологических наук, профессором), с которой в дальнейшем поддерживались тесные научные контакты.

Приход на заведование кафедрой биологии ИГМИ Э. Р. Геллера в 1934 г. определил вначале развитие паразитологического и прежде всего гельминтологического направления. Но еще в период руководства кафедрой профессором Э. Р. Геллером начали развиваться работы по кровососущим малярийным и немалярийным комарам. Большой вклад в их изучение был внесен нашим земляком Н. В. Хелевиным [12], получившим очное профильное биологическое образование в Институте прикладной зоологии в Ленинграде, а затем после короткого периода работы на Урале связавшим свою судьбу с г. Иваново. У доктора биологических наук, профессора Н. В. Хелевина установились прочные научные контакты с ЗИН РАН и Институтом паразитологии и тропических заболеваний Министерства здравоохранения СССР. Им был подобран коллектив специалистов, окончивших разные вузы, но активно работавших в течение нескольких десятилетий по изучению двукрылых насекомых, имеющих медицинское значение. Специалисты кафедры биологии ИГМИ (Н. В. Хелевин, О. Ф. Колесова, Н. В. Волозина, А. М. Лобанов, Л. А. Иващенко и др.) активно развивали экспериментальную медицинскую энтомологию, привлекали к серьезным научным исследованиям практических работников, студентов, школьников. Значительную роль в организации такой научной школы, обсуждении результатов исследований, объединении усилий коллективов разных вузов в тот период сыграли Научное общество краеведения, а в дальнейшем Ивановское областное отделение Всесоюзного энтомологического общества и областное отделение Московского общества испытателей природы [26]. Работы по систематике, морфологии и экологии комаров, мошек, мокрецов, слепней и мух, проводившиеся в этот период ивановскими учеными, высоко оценивались нашими коллегами из СССР и зарубежных стран и нередко заканчивались находками новых для страны или мира видов двукрылых. Принято считать, что обычно такие открытия делаются в каких-либо уникальных ландшафтах или весьма отдаленных от нашей области местах [10]. Но, например, в 60-е гг. XX в., Л. А. Иващенко в нашей области был найден и описан новый для науки вид мошек, названный «именем Н. В. Хелевина, много сделавшего в изучении переносчиков заразных заболеваний: *Woopthora chelevini* Ivaschenko, sp. n.» [4].

Сложившийся на кафедре биологии ИГМИ (в дальнейшем — ИГМА) диптерологический центр в 60—90-е гг. XX в. получил признание не только в Нечерноземной зоне России [13], но и в СССР [23]. В нем готовились научные кадры, выполнялись серьезные научные исследования в области практической и теоретической энтомологии, а также расширяющих ее границы иммунологии, кариосистематики и эволюции насекомых (П. А. Тихомиров, С. А. Зайниев, В. А. Курючкин, П. П. Иванищук, В. А. Исаев, Н. А. Куликова, А. И. Грязнов и др.).

В очерке истории ИГМИ за 1930—1995 гг. отмечалось, что в конце 80-х и первой половине 90-х гг. ИГМИ впервые вышел на международную арену, при этом четверым энтомологам (П. П. Иванищук, А. М. Лобанов, В. А. Исаев, Н. А. Куликова) за комплексное исследование двукрылых — переносчиков заразных болезней — была присуждена персонально каждому международная стипендия по результатам конкурса 1992—1993 гг. [24].

Долговременная стратегия, продуманная профессором Н. В. Хелевиным (1910—1977), определила в дальнейшем передачу знаний и опыта через его учеников не только в 70—80-е гг. в ИГМИ — ИГМА (А. М. Лобанов, П. П. Ива-нишук), но и в 80—90-е гг. XX в. в ИвГУ (В. А. Курючкин, В. А. Исаев).

Создание в ИвГУ биолого-химического факультета в 70-е гг. прошлого века способствовало развитию общей энтомологии, прежде всего за счет сотрудников и выпускников кафедры зоологии, созданной профессором Г. Л. Шкорбатовым (1918—1985), приехавшим из Харькова и возглавлявшим ее до 1985 г. Среди сотрудников кафедры — работающий до настоящего времени А. М. Тихомиров, закончивший МГУ им. М. В. Ломоносова (специализация по энтомологии), а затем в 1975 г. принятый в ИвГУ на кафедру зоологии, прошедший аспирантуру на кафедре энтомологии Ленинградского государственного университет (ныне — СПбГУ) и успешно защитивший кандидатскую диссертацию по чешуекрылым в 1979 г., автор ряда пособий и определительных таблиц по семействам насекомых.

Заметный след в истории энтомологических исследований в России оставил выпускник ИвГУ Н. А. Шобанов (1958—2015), ставший в 2000 г. доктором биологических наук и всегда тепло вспоминавший свою *alma mater* [18, 27]. Еще в период работы В. А. Исаева в Ивановском государственном медицинском институте после окончания аспирантуры (1975—1995 гг.) между кафедрой биологии, генетики и паразитологии ИГМИ и Н. А. Шобановым, работавшим в Институте биологии внутренних вод им. И. Д. Папанина РАН, длительное время поддерживались научные контакты, получили развитие биохимические и кариологические исследования длинноусых двукрылых насекомых, примером которых могут служить работы по мокрецам [5—9 и др.]. Это сотрудничество продолжалось и после перехода В. А. Исаева на работу на кафедру зоологии ИвГУ. Так, в частности Н. А. Шобанов был научным редактором монографии В. А. Исаева «Кариотипы мокрецов (*Diptera*, *Ceratopogonidae*)» [11], а результаты, полученные Н. А. Шобановым по эволюционной кариологии хирономид [27], нашли отражение в вышедших в ИвГУ учебных пособиях по генетике [14].

После обучения в МГУ им. М. В. Ломоносова (1967—1972 гг.) и прохождения аспирантуры (1972—1976 гг.) при кафедре энтомологии в том же вузе (под руководством известного энтомолога профессора Е. С. Смирнова) в 1977 г. в ШГПУ начинает работу А. Н. Юдин (1949—2017), защитивший в дальнейшем в 1987 г. в Москве кандидатскую диссертацию и проработавший в г. Шуе (в педагогическом университете, а затем филиале ИвГУ) до 2016 г. Проведенные им обширные научные энтомологические исследования двукрылых насекомых, прежде всего мух-цветочниц (антомиид) фауны СССР, привели к описанию 11 новых для науки видов, а педагогическая работа сопровождалась созданием пособий для определения насекомых студентами [28].

Кафедра зоологии сельхозинститута в 70-е гг. XX в. была преобразована сначала в кафедру зоологии и паразитологии, позднее в кафедру паразитологии, которой длительный период (с 1977 г.) заведовал доктор ветеринарных наук, профессор Ю. Ф. Петров (1936—2012). На кафедре паразитологии ИГСХА практические потребности ветеринарии определяли необходимость борьбы прежде всего с такими паразитами, как гельминты, однако в конце XX и начале XXI в. на ней стали выполняться серьезные научные исследования и в области арахноэнтомологии.

Еще ранее, в 80—90 гг. XX в., в нашей области и за ее пределами исследования арахноэнтомологического профиля интенсивно начали проводиться на кафедре зоологии ИвГУ. В этот период ею руководила доктор биологических наук, паразитолог и эпидемиолог Н. М. Окулова (1936—2018), приехавшая из Москвы и возглавлявшая кафедру с 1986 по 1995 г.

Под руководством Н. М. Окуловой в 1995 г. защитила кандидатскую диссертацию по результатам изучения эктопаразитов (блох, гамазовых и иксодовых клещей) А. М. Майорова, работавшая на кафедре зоологии с 1975 г. Сотрудничество кафедры зоологии с Н. М. Окуловой по изучению эктопаразитов из этих групп продолжалось в дальнейшем еще долгие годы после переезда ее в Москву на работу в Институт проблем экологии и эволюции РАН.

В 1988 г. в ИвГУ была создана кафедра общей биологии и ботаники. На заведование ею был приглашен из ИГМИ кандидат медицинских наук, доцент В. А. Курючкин, который в последующие 30 лет в университете ввел ряд новых биологических курсов и способствовал развитию исследований по микробиологии и иммунологии насекомых — вначале мух, а в дальнейшем шмелей, установил научные контакты с различными учреждениями и НИИ данного профиля.

Кафедра зоологии в ИвГУ как самостоятельное подразделение вуза просуществовала до 2012 г. В период с 1995 по 2012 г. ее возглавлял профессор В. А. Исаев, перешедший в Ивановский госуниверситет по конкурсу из ИГМА. Он руководил зоологическими, паразитологическими и энтомологическими исследованиями разного профиля, развивая научные контакты с коллегами из нашей страны, ближнего и дальнего зарубежья, разрабатывая новые учебные курсы, включавшие энтомологическую, паразитологическую, экологическую и эволюционную тематику.

В этот период В. А. Исаевым были установлены научные контакты с академиком РАСХН Ю. Ф. Петровым, осуществлялась совместная подготовка кадров энтомологического профиля и проводились комплексные научные исследования в вузах (ИвГУ, ИГСХА им. Д. К. Беляева и ИвГМА).

Первое десятилетие (1995—2004 гг.) этого периода характеризовалось интеграцией усилий научных школ вузов в решении проблем охраны здоровья человека и животных [21]. В 1997—2000 гг. исследования руководителя этого направления в ИвГУ профессора В. А. Исаева получили грантовую поддержку Конкурсного центра фундаментального естествознания (КЦФЕ, г. С.-Петербург) и Президиума РАН (г. Москва) — государственная научная стипендия для выдающихся ученых [25]. По результатам этих работ им было опубликовано три индивидуальные монографии.

В это время были защищены диссертации на соискание ученой степени кандидата биологических наук по городским комарам С. В. Егоровым (в 2000 г.), а также паразитическим членистоногим у птиц Ю. Г. Смирновой (в 2002 г.) (научные руководители Ю. Ф. Петров, В. А. Исаев), по эктопаразитам мелких млекопитающих И. Б. Хитерман (научный руководитель В. А. Исаев, 2003 г.) и зоофильным мухам М. С. Бурцевой (научные руководители Ю. Ф. Петров, Н. А. Куликова).

В этот период на рубеже веков начала оформляться еще одна школа сельскохозяйственных энтомологов, связавшая изучение одновременно фауны, экологии и паразитологии шмелей в природной обстановке и разведение их в закрытом грунте. На первом этапе в 1999 и 2000 г. по шмелям были защищены кандидатские диссертации представителями этой энтомологической

научной школы (соответственно Е. О. Мунтяна и В. И. Ащеулова). Обе работы выполнялись под руководством Ю. Ф. Петрова и В. А. Исаева.

В дальнейшем были изданы монографии, оформлен целый ряд патентов и защищены докторские диссертации В. И. Ащеуловым в 2003 г. и В. А. Пономаревым в 2004 г., посвященные в основном технологиям искусственного разведения шмелей и использованию их для опыления сельскохозяйственных культур закрытого грунта в теплицах.

Исследования по экологии шмелей основателя губернского энтомологического научного направления А. Н. Казанского [22] получили свое продолжение и развитие в работах современных авторов, среди которых были как практические работники — сотрудники лаборатории шмелеводства совхоза «Тепличный», так и ученые разных вузов (Ю. Ф. Петров, А. Ю. Гудкова, В. И. Ащеулов, В. А. Исаев, В. А. Курючкин, В. А. Пономарев, А. М. Тихомиров и др.).

Успешные защиты докторской диссертации Н. А. Куликовой в 2004 г. в ЗИН РАН, а также С. В. Егоровым в ВИГИС в 2013 г., последующее заведование кафедрами Н. А. Куликовой и С. В. Егоровым определили возможности продолжения энтомологических исследований в ИвГМА и ИГСХА им. Д. К. Беляева как непосредственно этими учеными, так и выполнения исследований под их руководством.

Среди новых направлений биологических работ наших вузов, оформившихся в последние годы, следует отметить развитие исследований в области экологической паразитологии [19], связанных с потенциальной передачей мокрецами новых для нашей страны и мира вирусных заболеваний — блутана и болезни Шмалленберга [15—17]. Значительный интерес представляют также начавшиеся комплексные исследования паразитарных систем, включающих клещей, мелких млекопитающих, домашних животных и бабзидий [2, 3, 20].

В ИвГУ с 2012 г. научные энтомологические исследования проводятся на кафедре общей биологии и физиологии (кандидат медицинских наук, доцент В. А. Курючкин и доктор биологических наук, профессор В. А. Исаев), а также на кафедре ботаники и зоологии (кандидаты биологических наук, доценты А. Д. Майорова и А. М. Тихомиров).

Способствует развитию исследований в области энтомологии зоологический музей ИвГУ, где с момента его образования (1982 г.) всеми его заведующими (Г. М. Сальников до 1995 г., С. В. Егоров — 1995—1999 гг., А. А. Майоров с 1999 г.) бережно сохраняются энтомологические коллекции. Особую ценность в этом богатом собрании насекомых представляют коллекции бабочек. В 1988 г. вдовой известного ленинградского ученого А. Д. Слонима музеем ИвГУ было передано около 3 тыс. экземпляров тропических бабочек «из Африки, Южной Америки, Юго-Восточной Азии. Так в нашем музее появились огромные птицекрылки с Новой Гвинеи, морфиды из бассейна Амазонки и другие чешуекрылые. В 1991 г. в вуз поступила коллекция, собранная энтомологами братьями В. и В. Лузевыми (уроженцами Лежнева)» [1, с. 455—456]. Развитие энтомологии в ИвГУ тесно связано с проведением зоологических практик, в ходе которых студентами бакалавриата и магистратуры осваивается определение различных групп насекомых, проводятся фаунистические и экологические исследования. Курсы по общей энтомологии введены в программы магистратуры по фундаментальной биологии и аспирантуры по зоологии.

В настоящее время, в столетний юбилей нашей области необходим приток молодых кадров в энтомологию, паразитологию и биологическое образование в целом. Благоприятные условия для развития юных биологов могут быть созданы только совместно всеми заинтересованными сторонами: управлением образования, вузами, школами, учреждениями дополнительного образования и, конечно, родителями детей. Столетняя история нашей губернии и анализ успешного развития в ней вузов, в которых формировались кадры биологов по общей, медицинской, ветеринарной и сельскохозяйственной энтомологии, показывают, что у нас есть прекрасное прошлое, опыт и традиции в настоящем, четкое видение необходимости продолжения этой работы в будущем.

#### Библиографический список

1. Балдин К. Е. Ивановский государственный университет, 1918—2003 годы : очерки истории. Иваново: Иван. гос. ун-т, 2004. 588 с.
2. Егоров Д. С., Баландина В. Н., Крючкова Е. Н., Кузьмичев В. В., Егоров С. В. Бабезиозы собак в Верхневолжье // Теория и практика борьбы с паразитарными болезнями. 2015. № 16. С. 128—129.
3. Егоров Д. С., Крючкова Е. Н., Исаев В. А., Егоров С. В. Фауна и экология мелких млекопитающих — прокормителей иксодовых клещей в природных очагах babesiosis в Ивановской области // Теория и практика борьбы с паразитарными болезнями. 2014. № 15. С. 91—92.
4. Иващенко Л. А. Новый вид мошек семейства Simuliidae [Diptera] // Природа Ивановской области / под ред. Н. В. Хелевина ; Всероссийское общество охраны природы. Иваново, 1968. С. 125—127.
5. Исаев В. А. Белковые фракции гемолимфы личинок мокрецов-энтомофагов / Иван. гос. мед. ин-т. Иваново, 1989. 7 с. Деп. в ВИНТИ 08.02.89 г. № 1408-B-89.
6. Исаев В. А. Внутрипопуляционная изменчивость гемоглобинов гемолимфы личинок *Sphaeromyias fasciatus* Mg. (Diptera, Ceratopogonidae) / Иван. гос. мед. ин-т. Иваново, 1989. 7 с. Деп. в ВИНТИ 16.06.89 г. № 3266-B-89.
7. Исаев В. А. Описание кариотипов пяти видов мокрецов / Иван. гос. мед. ин-т. Иваново, 1989. 7 с. Деп. в ВИНТИ 16.06.89 г. № 3267-B-89.
8. Исаев В. А. Кариотипы мокрецов *Sphaeromyias pictus* Mg. и *Sphaeromyias candidatus* (Loew) / Иван. гос. мед. ин-т. Иваново, 1989. 7 с. Деп. в ВИНТИ 13.06.89 г. № 3899-B-89.
9. Исаев В. А. Электрофоретические и морфометрические исследования личинок *Sphaeromyias fasciatus* (Mg.) (Diptera, Ceratopogonidae) / Иван. гос. мед. ин-т. Иваново, 1989. 13 с. Деп. в ВИНТИ 29.12.89 г. № 7751-B-89.
10. Исаев В. А. *Alluaudomyia ussuriica* — новый вид некровососущих мокрецов из Приморского края // Сибирский биологический журнал. 1993. № 2. С. 70—72.
11. Исаев В. А. Кариотипы мокрецов (Diptera, Ceratopogonidae). Иваново : Иван. гос. ун-т, 1998. 76 с.
12. Исаев В. А. Профессор Н. В. Хелевин — ученый, педагог, краевед // Краеведческие записки. Иваново, 1998. С. 97—100.
13. Исаев В. А. Иваново — один из центров диптерологических исследований в 1960—1990-е годы в Нечерноземной зоне России // Борисовский сборник / отв. ред. В. В. Возилов. Иваново : Референт, 2009. Вып. 1 С. 200—206.
14. Исаев В. А. Элементарная генетика : сборник заданий и задач для развивающего обучения. Иваново : Иван. гос. ун-т, 2012. 204 с.

15. *Исаев В. А.* Кровососущие мокрецы рода *Culicoides* Нечерноземной зоны России как потенциальные переносчики вируса Шмалленберга // Вестник Ивановского государственного университета. Сер.: Естественные, общественные науки. 2013. № 2. С. 14—21.
16. *Исаев В. А.* Биология и экология мокрецов рода *Culicoides* и их потенциальное значение в передаче вируса Шмалленберга в Восточном Верхневолжье // Вестник Костромского государственного университета им. Н. А. Некрасова. 2014. № 6. С. 38—40, 335.
17. *Исаев В. А.* Мокрецы рода *Culicoides* — потенциальные переносчики блугана и блуганоподобных заболеваний в Ивановской области // Вестник Ивановского государственного университета. Сер.: Естественные, общественные науки. 2015. № 2. С. 14—18.
18. *Исаев В. А.* Первый доктор биологических наук. Памяти Н. А. Шобанова // Вестник Ивановского государственного университета. Сер.: Естественные, общественные науки. 2016. № 2. С. 46—48.
19. *Исаев В. А.* Основы экологической паразитологии. Иваново : Иван. гос. ун-т, 2016. 172 с.
20. *Исаев В. А., Егоров Д. С.* Экология иксодовых клещей — биологических переносчиков возбудителей бабезиоза собак в Восточном Верхневолжье // Теория и практика борьбы с паразитарными болезнями. 2013. № 14. С. 164—166.
21. *Исаев В. А., Петров Ю. Ф.* Интеграция научных школ в решении проблем охраны здоровья человека и животных // Природа и человек : материалы IV научно-практической конференции «Природа и человек. Антропогенное воздействие на окружающую среду» / под ред. В. А. Исаева. Иваново : Иван. гос. ун-т, 2005. С. 22—24.
22. *Казанский А. Н.* Шмелиное население Иваново-Вознесенской губернии. Его видовой состав, порайонное распределение и хозяйственное значение // Труды губернского научного общества краеведения. 1925. Вып. 3. С. 68—92.
23. *Кривошеина Н. П.* Основные направления развития диптерологии в СССР // Двукрылые насекомые, их систематика, географическое распространение и экология. Л., 1983. С. 72—79.
24. *Лукин В. А.* Очерки истории Ивановского государственного медицинского института им. А. С. Бубнова (1930—1995 гг.) / ИГМА. Иваново, 1997. 236 с.
25. Стипендиаты Российской академии наук // Университетское обозрение / ИвГУ. 1997. № 7 (13). 23 с.
26. *Хелевин Н. В.* К истории изучения животного мира Ивановской области // Природа Ивановской области» / под ред. Н. В. Хелевина. 1976. С. 195—200.
27. *Шобанов Н. А.* Род *Chironomus* Meigen (Diptera, Chironomidae). Систематика, биология и эволюция : автореф. дис. ... д-ра биол. наук. СПб., 2000. 52 с.
28. *Юдин К. А., Коротков Д. С.* «In Memoriam»: Александр Николаевич Юдин — ученый-энтомолог, педагог, художник и меценат : (историко-биографический очерк // На пути к гражданскому обществу. 2017. № 3 (27). С. 76—87.
29. URL: <http://bio.spbu.ru/faculty/departments/entomology/history.php> (дата обращения: 29.11.2017).
30. URL: <http://www.bio.msu.ru/dict/view.php?ID=30> (дата обращения: 29.11.2017).

УДК 58.006

*Л. Ю. Минеева, И. Н. Борисова, Л. С. Бугаенко***СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ КОЛЛЕКЦИЙ РАСТЕНИЙ  
БОТАНИЧЕСКОГО САДА ИВГУ**

Приведены данные формирования коллекций растений в ботаническом саду ИвГУ.

**Ключевые слова:** ботанический сад ИвГУ, коллекции и экспозиции растений.

The data on the formation of collections of plants in the Botanical Garden of the IvSU are presented.

**Key words:** Botanical Garden of IvSU, collections and expositions of plants.

Ботанический сад Ивановского государственного университета расположен в северо-восточной части городского парка культуры и отдыха им. Революции 1905 года на правом возвышенном берегу реки Талка. Территория ботанического сада со всех сторон окружена сосновыми и смешанными лесами. С востока на противоположном берегу реки Талки расположен жилой микрорайон Лесное. Площадь ботанического сада 4,32 га (43191 кв. м). Географические координаты сада: широта — 57 E, долгота — 41 N, высота над уровнем моря — 126 м. Климат умеренно-континентальный [5].

Ботанический сад — особо охраняемая природная территория (ООПТ), является памятником природы регионального значения (решение Ивановского облисполкома № 164 от 22.02.1965 г.) и входит в состав Совета ботанических садов России, Беларуси и Казахстана и Региональный совет ботанических садов Центра Европейской части России (с 25.12.2008 г.).

Ботанический сад ИвГУ был организован 21 февраля 1977 г. на основании приказа Министерства высшего и среднего специального образования РСФСР № 184 от 21.04.76 г. «Об организации ботанического сада в Ивановском университете». Он был создан на базе дендрария, заложенного в 1885—1890 гг. на даче крупного фабриканта Х. И. Куваева [2].

Ботанический сад является структурным подразделением кафедры ботаники и зоологии биолого-химического факультета университета, используется в природоохранных, научно-исследовательских, учебных и практических целях.

Основные направления работы ботанического сада.

1. Создание и сохранение в естественных и искусственных условиях биоразнообразия живых растений (особенно редких и исчезающих видов) и других объектов, имеющих большое научное, учебное, хозяйственное и культурное значения.

2. Проведение научно-исследовательских работ по интродукции древесно-кустарниковых культур из различных эколого-географических зон нашей страны, растениеводству, защите и селекции растений, а также экологии и охране природы, декоративному садоводству и ландшафтной архитектуре.

3. Создание базы для проведения учебной, воспитательной и научно-просветительской работы.

4. Научное обеспечение мероприятий по оздоровлению экологической обстановки города Иванова.

---

© Минеева Л. Ю., Борисова И. Н., Бугаенко Л. С., 2018

5. Практический вклад в ландшафтный дизайн региона и подведомственных Ивановскому университету территорий.

По данным на 1 января 2018 г. в ботаническом саду Ивановского государственного университета содержатся 24 коллекции и экспозиции [1, 4]:

- дендрарий [3];
- аптекарский огород;
- альпийская горка;
- розарий (41 сорт);
- коллекция комнатных и оранжерейных растений;
- плодово-ягодный сад семечковых культур (стиль классицизма);
- плодово-ягодный сад косточковых культур (стиль кантри);
- средиземноморский садик;
- сад по мотивам японского искусства;
- экспозиция лиственно-декоративных растений;
- экспозиция цветочно-декоративных растений;
- экспозиция хвойных растений;
- отдел хозяйственно-ценных растений;
- экспозиция пряно-вкусовых растений сем. *Labiatae* (3 рода; 15 видов, форм и сортов);
- коллекционный участок луковичных и клубнелуковичных растений;
- питомник древесно-кустарниковых растений;
- участок декоративных кустарников;
- опытный участок по вегетативному размножению растений;
- отдел редких и охраняемых растений, внесенных в Красную книгу РФ и Ивановской области (71 вид) [5];
- экспозиция рододендронов (19 видов, 2 сорта);
- экспозиция гортензий (5 видов, 14 сортов);
- коллекция кленов (12 видов);
- коллекция луков (21 вид, 2 формы и 5 сортов);
- выставочная декоративная экспозиция в сквере третьего учебного корпуса ИвГУ [6].

Начиная с 2012 г. число экспозиций постоянно увеличивалось. Это можно объяснить активизацией выполнения на базе ботанического сада курсовых и дипломных работ студентов кафедры общей биологии и ботаники (ныне — кафедры ботаники и зоологии) ИвГУ под руководством преподавателей.

Количественные показатели, характеризующие численность высших растений в коллекциях и экспозициях ботанического сада ИвГУ с 2012 по 2017 г. можно проследить по приведенным таблице и рисунку.

**Динамика численности высших растений  
в коллекциях и экспозициях ботанического сада ИвГУ (2012—2017 гг.)**

Показатели	Количество, шт.					
	2012 г.	2013 г.	2014 г.	2015 г.	2016 г.	2017 г.
Количество видов, форм и сортов	1505	1556	1446	1604	1872	1784
Количество семейств	114	119	122	125	125	121
Пополнение коллекционного фонда	297	104	118	82	268	251



#### Динамика изменения ассортимента растений ботанического сада ИвГУ

Таким образом, видна положительная динамика роста численности видового состава высших растений. Однако большинству коллекций, созданных до 2014 г., требуется реконструкция ввиду разрастания растений, необходимости размещения новых поступлений и других факторов [8].

В значительной степени регуляцию биоразнообразия и численности растений осуществляют их разнообразные болезни. Поэтому в ботаническом саду ИвГУ постоянно ведутся фитопатологические исследования, отслеживается динамика проявления заболеваний, выявляются их причины, осуществляется мониторинг состояния растений, разработка мер борьбы и профилактики болезней [9, 10, 11, 12, 13].

2017 год был объявлен Годом экологии и ООПТ России, и в этот период ботаническим садом, являющимся ООПТ регионального значения, была выполнена важная и крайне необходимая работа:

- подготовлены документы на получение субсидий для выполнения государственного задания на реализацию мероприятий, направленных на обеспечение содержания объектов, являющихся уникальными, имеющими научное или историческое значение, выполняющими специфические функции согласно распоряжению Минобрнауки России от 16.05.2017 г. № Р-2449;
- получены субсидии на работы в 2017 г.;
- осуществлено участие в реализации государственного задания: проведен капитальный ремонт ряда объектов ботанического сада;
- по итогам выполнения государственного задания подготовлены материалы к отчету.

В связи с расширением огражденной территории ботанического сада в 2017 г. был разработан эскизный проект планировки и реконструкции некоторых экспозиций, дорожно-тропиночной сети и создания малых архитектурных форм.

На данный момент готовится следующий пакет документов для продолжения работ. Все эти усилия помогут в реализации главных задач в деятельности ботанического сада ИвГУ.

*Библиографический список*

1. Аношина Е. Н., Бельцов А. С., Борисова И. Н., Звонарева Ю. А., Скворцова О. Е., Чекан И. В. К 35-летию ботанического сада ИвГУ: краткие итоги деятельности // Актуальные проблемы сохранения и изучения биоразнообразия Верхневолжья : материалы межрегиональной научно-практической конференции, посвященной 35-летию кафедры общей биологии и ботаники и ботанического сада ИвГУ. Иваново, 28—29 сентября 2012 г. Иваново : Иван. гос. ун-т, 2012. С. 183—189.
2. Балдин К. Е. Ивановский государственный университет 1818—2003 гг. : очерки истории. Иваново : Иван. гос. ун-т, 2004. 588 с. с ил.
3. Бельцов А. С., Борисова И. Н. Дендрологическая коллекция ботанического сада Ивановского государственного университета // Вестник Ивановского государственного университета. Сер.: Естественные, общественные науки. 2013. Вып. 2. С. 37—39.
4. Борисова Е. А., Минеева Л. Ю., Хитерман И. Б. Коллекции ботанического сада Ивановского государственного университета и их роль в сохранении биологического разнообразия // Биологическое разнообразие. Интродукция растений : материалы четвертой Международной научной конференции. СПб. : Ботанический сад БИН РАН, 2007.
5. Кадастровая справка ООПТ Ботанический сад Ивановского государственного университета. URL: <http://oopt.aari.ru/oopt/Ботанический-сад-Ивановского-государственного-университета> (дата обращения: 17.04.2018).
6. Минеева Л. Ю., Борисова И. Н. Особенности ландшафтного проектирования сквера у третьего корпуса ИвГУ // Вестник Ивановского государственного университета. Сер.: Естественные, общественные науки. 2011. Вып. 2. С. 13—19.
7. Минеева Л. Ю., Борисова Е. А., Хитерман И. Б. Растения Красной книги Ивановской области в условиях ботанического сада Ивановского государственного университета // Сборник статей участников XII делегатского съезда Русского ботанического общества. Петрозаводск, 2008. С. 270—272.
8. Минеева Л. Ю., Борисова И. Н., Ахутина С. О. Усадебный парк XIX века в Иваново-Вознесенске // Международные чтения, посвященные 110-летию со дня рождения доктора биологических наук, профессора Л. И. Рубцова : материалы конференции, 15—18 мая 2012. Киев, 2012. С. 427—430.
9. Минеева Л. Ю., Скворцова О. Е. Патогенная микофлора культурных и дикорастущих растений ботанического сада ИвГУ // Актуальные проблемы сохранения и изучения биоразнообразия Верхневолжья : материалы межрегиональной научно-практической конференции, посвященной 35-летию кафедры общей биологии и ботаники и ботанического сада ИвГУ. Иваново, 28—29 сентября 2012 г. Иваново : Иван. гос. ун-т, 2012. С. 240—245.
10. Минеева Л. Ю., Скворцова О. Е. Ржавчинные грибы древесных и кустарниковых пород ботанического сада Ивановского государственного университета // Цветоводство : традиции и современность : материалы VI Международной научной конференции. г. Волгоград, 15—18 мая 2013 г. / отв. ред. А. С. Демидов. Белгород : ИД «Белгород» НИУ «БелГУ», 2013. С. 450—451.
11. Минеева Л. Ю., Скворцова О. Е. Голландская болезнь язвов // Вестник Ивановского государственного университета. Сер.: Естественные, общественные науки. 2014. Вып. 2. С. 22—26.
12. Минеева Л. Ю., Скворцова О. Е. Новые находки ржавчинных грибов на деревьях и кустарниках ботанического сада и дендрария ИвГУ // Вестник Ивановского государственного университета. Сер.: Естественные, общественные науки. 2015. Вып. 1. С. 22—26.
13. Минеева Л. Ю., Фомина О. Е. Ржавчинные грибы на лекарственных растениях территории ботанического сада и дендрария ИвГУ // Вестник Ивановского государственного университета. Сер.: Естественные, общественные науки. 2016. Вып. 2. С. 42—45.

## ВЛИЯНИЕ РАЗЛИЧНЫХ КОНЦЕНТРАЦИЙ НИТРАТА СВИНЦА НА ПОЧВЕННУЮ МИКРОБИОТУ

Статья отражает изучение устойчивости представителей почвенной микрофлоры к различным концентрациям нитрата свинца при выращивании на питательных субстратах. В дальнейшем это поможет использовать данные организмы в качестве биоиндикаторов и биоремедиаторов тяжелых металлов, а также может дать представление о путях негативного действия свинца на живые системы.

**Ключевые слова:** экология, бактерии, *Bacillus*, свинец, нитрат, тяжелые металлы, биоремедиация, биоиндикация.

The work is devoted to the study of the stability of the representatives of soil microflora to various concentrations of lead nitrate when grown on nutrient substrates. In the future this will help to use these organisms as bioindicators and bioremediators of heavy metals, and can also give an idea of the ways of negative action of lead on living systems.

**Key words:** ecology, bacteria, *Bacillus*, lead, nitrate, heavy metals, bioremediation, bioindication.

### Введение

Развитие цивилизации влечет за собой неминуемое загрязнение окружающей среды. Твердые промышленные и бытовые отходы в огромных количествах ежегодно попадают на свалки. Выбросы газообразных веществ в атмосферу и жидких — в реки и моря с каждым днем увеличиваются. Расширяющиеся территории городов и промышленных зон диктуют необходимость постоянного мониторинга опасных загрязнителей, которые могут негативно влиять на живые системы. Одним из наиболее значимых для средней полосы России поллютантов являются тяжелые металлы. Их содержание в почвенном покрове Ивановской и Костромской областей локально превышает предельно допустимые концентрации в несколько раз [4, 5]. Это может повлечь за собой развитие ряда заболеваний и даже привести к смерти, поскольку большинство соединений тяжелых металлов накапливается в организме человека и практически не выводится [6].

Растения также способны накапливать значительное количество тяжелых металлов. В частности, хвойные деревья обладают хорошей фильтрационной способностью, поэтому их зачастую высаживают вдоль автомагистралей [3].

Некоторые представители прокариот за счет хорошей абсорбции ионов тяжелых металлов могут очищать организмы млекопитающих от свинца. Причем наилучшим образом с этой задачей справляются бактерии рода *Bacillus* [2].

Высокий потенциал биоремедиации тяжелых металлов организмами растений и бактерий может быть использован при очистке сельскохозяйственных угодий и в медицине [8].

### Материалы и методы

Исследования бактерий проводились на суспензии почвы, засеваемой на чашки Петри по методу «газона» [1]. В качестве источника катиона свинца использовался свинец азотнокислый (ХЧ, ГОСТ 4236-77), поскольку именно в этой форме чаще всего поступает в окружающую среду свинец при промышленном загрязнении. Основным субстратом для выращивания колоний послужил питательный агар сухой (по ТУ 9385-001-64786015-2012). Финальная окраска производилась по методике Грама.

Контрольная группа всегда выращивалась на чистом питательном агаре. Опытные группы подвергались воздействию различных концентраций нитрата свинца, растворенного в питательном агаре (всего 8 вариантов). Экспозиция в термостате для всех случаев составляла 48 часов. Для того чтобы убедиться, что негативное влияние исходит именно от катиона свинца, а не от нитрат-иона, в эксперимент была включена группа сравнения, с которой производились те же манипуляции, но вместо нитрата свинца использовался нитрат кальция. Оценивалось количество колониеобразующих единиц (КОЕ), характер колоний, морфотипы и состояние бактериальных клеток при микроскопировании.

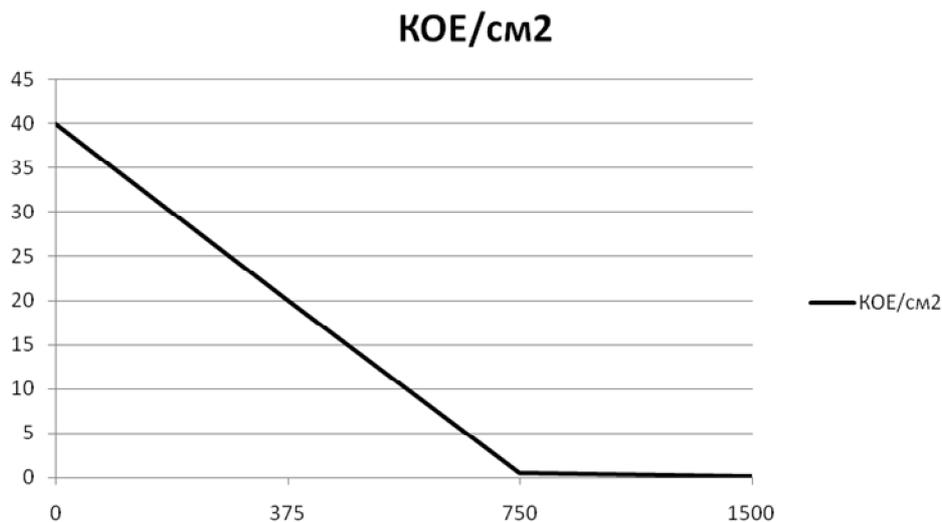
### Результаты

В контрольной группе бактерий наблюдается обычный для высевания почвенной суспензии на чистый агар рост в среднем до 40 КОЕ/см<sup>2</sup>. При микроскопировании обнаруживаются активно делящиеся вегетативные палочковидные (рис. 1) и кокковидные (рис. 2) формы.

При введении в агар нитрата свинца до концентрации 375 мг/л количество колониеобразующих единиц уменьшается до 20 КОЕ/см<sup>2</sup>. Колонии бацилл приобретают темно-коричневый центр и уменьшаются в размерах по сравнению с контрольным посевом. Колонии кокковых форм увеличиваются в размерах и начинают доминировать. При микроскопировании обнаруживается некоторое количество спорных форм.

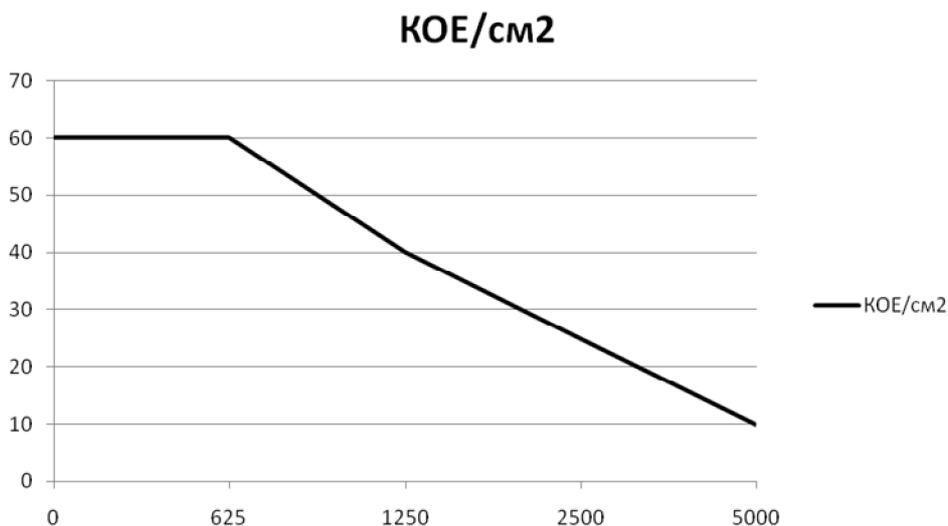
При повышении концентрации нитрата свинца до 750 мг/л колонии сильно деформируются, по краям становятся слизистыми, цвет изменяется в сторону темных оттенков, общее число колоний на чашке не превышает 40 (в среднем 0,5 КОЕ/см<sup>2</sup>). Появляются колонии актиномицетов. На мазке кокковые формы показывают хорошую пролиферацию, бациллы же увеличивают число спор, которые начинают преобладать над вегетативными формами.

При концентрации нитрата свинца 1500 мг/л на поверхности субстрата образуются лишь 9 сильно деформированных белесых колоний (0,12 КОЕ/см<sup>2</sup>) бацилл, большинство клеток на мазке находятся в спорной форме (рис. 1).

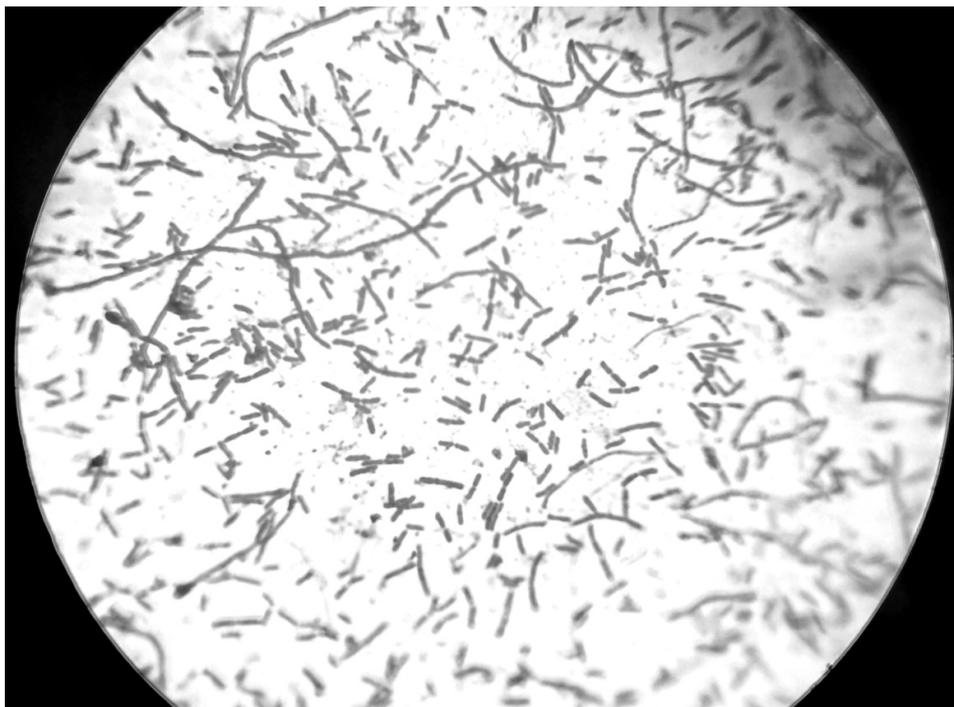


*Рис. 1.* Зависимость КОЕ/см<sup>2</sup> почвенной микрофиты от концентрации нитрата свинца (мг/л) в питательном агаре

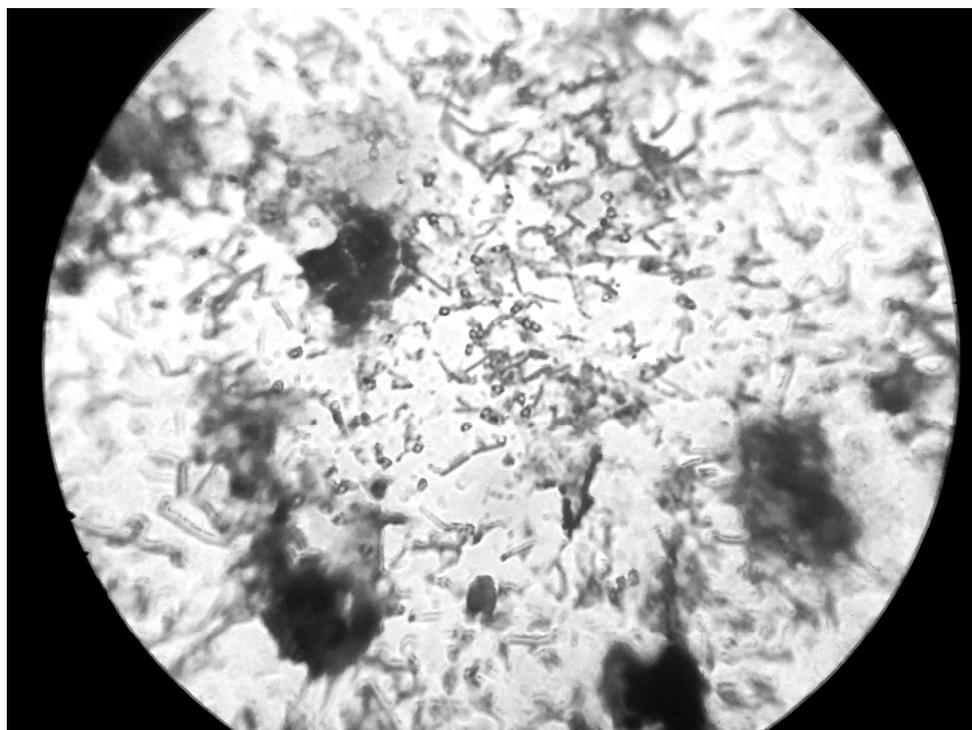
Выделенная культура устойчивых к воздействию свинца бацилл была высеяна на питательный агар в 5 чашек — контрольную и 4 с различными концентрациями нитрата свинца (625 мг/л, 1250 мг/л, 2500 мг/л, 5000 мг/л). С ростом концентрации токсина колонии изменяли цвет с желтовато-коричневого до темно-коричневого с почти черными центрами и уменьшались в количестве (60, 40, 25, 10 КОЕ/см<sup>2</sup> соответственно) (рис. 2). Бактериальные клетки в мазке при низких концентрациях (625 и 1250 мг/л) и в контрольной чашке обнаруживают значительное число активно делящихся поперек вегетативных форм (рис. 3). В мазках из чашек с высокой концентрацией нитрата свинца (2500 и 5000 мг/л) преобладают споровые формы (рис. 4), вегетативные клетки сильно изменены, наблюдается нерасхождение клеток после деления, что приводит к образованию стрептобацилл извитой структуры.



*Рис. 2.* Зависимость КОЕ/см<sup>2</sup> устойчивых к свинцу бацилл из почвенной микрофиты от концентрации нитрата свинца (мг/л) в питательном агаре



*Рис. 3.* Мазок культуры бацилл, выросших при концентрации нитрата свинца 0 мг/л (контрольная группа). Окраска по Граму. X1600



*Рис. 4.* Мазок культуры бацилл, выросших при концентрации нитрата свинца 2500 мг/л. Окраска по Граму. X1600

### Обсуждение результатов

Изменения в количестве КОЕ, форме колоний и клеток можно объяснить воздействием ионов свинца на белковые структуры в организме бактерий. Показано, что катион  $Pb^{2+}$  хорошо взаимодействует с серусодержащими аминокислотами [7]. Они могут находиться в составе протеиновых комплексов на оболочке бактерий, что служит первичным барьером на пути токсина внутрь клетки. Но при этом функции некоторых насосов будут заблокированы, клетка будет получать меньше питательных веществ, хуже выводить метаболиты, вследствие чего рост и развитие замедлятся. При более длительном воздействии катионов свинца все белковые структуры внешней оболочки будут заняты и не смогут связывать дополнительные атомы свинца, что приведет к проникновению его в более глубокие слои, связыванию с белками-ферментами, в том числе и с дыхательными, а затем и к гибели особи. Следовательно, устойчивость к воздействию свинца бактерия может приобрести либо полностью ограничив проникновение веществ внутрь (споруляция), либо увеличив число связывающих свинец белков на поверхности (можно наблюдать деформацию клеточной стенки, патологические размеры и форму отдельных клеток, нерасхождение после деления). По обоим путям могут пойти бактерии семейства *Vacillaceae*, что обеспечивает их устойчивость к действию высоких концентраций нитрата свинца.

### Выводы

1. Высокие концентрации нитрата свинца (до 5 г/л) способны выдерживать бактерии семейства *Vacillaceae*.
2. Устойчивость им придают споруляция и накопление избыточного количества белков в оболочке.
3. Данные бактерии могут стать хорошими биоремедиаторами свинца в почвенном покрове и живых системах.

### Библиографический список

1. Аникеев В. В., Лукомская К. А. Руководство к практическим занятиям по микробиологии. М. : Просвещение, 1983. 127 с.
2. Бабушкина А. Е. Влияние пробиотических препаратов на основе бактерий рода *Bacillus* на морфологию органов-мишеней млекопитающих при интоксикации солями свинца // Современные проблемы науки и образования. 2014. № 2. URL: <http://science-education.ru/ru/article/view?id=12426> (дата обращения: 28.03.2018).
3. Козловский Е. В., Баганова О. А., Мастерова С. А. Результаты мониторинга атмосферных осадков, воды и почвы на содержание свинца в г. Иванове // Региональное устойчивое развитие: комплексные биосферно-ноосферные исследования, проектирование и реализация / под ред. В. А. Исаева, Г. С. Смирнова. Иваново : Иван. гос. ун-т, 2007. С. 100—102.
4. Румянцев И. В., Дунаев А. М., Сивухин А. Н., Марков Д. С., Гриневич В. И. Эколого-гигиеническая оценка качества почв Ивановской области / // Безопасность в техносфере. 2017. Т. 6, № 1. С. 31—37.
5. Сивухин А. Н., Марков Д. С. Оценка содержания тяжелых металлов в почвенном покрове средней полосы Российской Федерации // Научная жизнь. 2016. № 12. С. 87—101.
6. Харрисон Т. Р. Внутренние болезни / пер. с англ. А. В. Сучкова, Н. Н. Заваденко, Д. Г. Катковского. М. : Медицина, 1992. Ч. 1. 3430 с.
7. Davies M. S., Francis D., Thomas J. D. Rapidly of cellular changes induced by zinc in a zinc tolerant and non-tolerant cultivar of *Festuca rubra* L // *New Phytol.* 1991. Vol. 117. P. 103—108.
8. Schnoor J. L. Degradation by Plants-Phytoremediation // *Biotechnology.* 2000. Vol. 11b. P. 372—384.

## **МЕЖМОЛЕКУЛЯРНЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В ДИМЕРЕ АЛАНИНА**

Проведена оценка энергии взаимодействия и ее компонентов двух молекул аланина по методу Морокумы для димера с оптимизированной структурой и без. Показано, что все компоненты, за исключением энергии смешивания, вносят достаточно большие вклады, причем наибольший дает электростатическое взаимодействие. Процедура оптимизации геометрии молекул приводит к изменению структуры димера, сопровождающемуся ослаблением пептидной водородной связи между молекулами.

**Ключевые слова:** аминокислоты, аланин, межмолекулярное взаимодействие, моделирование.

The estimation of the interaction energy and its components of two molecules of alanine by the Morokuma's method for dimer with optimized structure and without has been carried out. It was shown that all components, with the exception of mixing energy, had sufficiently large contributions. But the main contribution is due to electrostatic interaction. The procedure for geometry optimizing of molecules leads to change in the structure of the dimer that is accompanied by a weakening of the peptide hydrogen bond between the molecules.

**Key words:** amino acids, alanine, intermolecular interaction, modeling.

### **Введение**

В последние десятилетия наибольшее внимание в фармацевтической промышленности уделяется разработке лекарственных веществ на основе биологически активных соединений, которые участвуют в процессах жизнедеятельности человека. В медицинской практике для лечения и профилактики некоторых патологий широко применяются лекарственные препараты, наиболее эффективными из которых являются аминокислотные средства.

Аминокислотам свойствен полиморфизм, когда одно и то же вещество кристаллизуется с образованием различных кристаллических структур, которые могут иметь существенно различные физические и химические свойства, а также разный медицинский эффект [2, 3, 8]. Таким образом, исследование свойств и устойчивости систем межмолекулярных водородных связей (Н-связей), влияющих на полиморфные модификации, является актуальной и важной практической задачей, особенно в случае с лекарственными веществами.

Ранее было установлено [4], что в димере глицина присутствуют сильные пептидные водородные связи. Декомпозиция энергии взаимодействия ( $\Delta E$ ) по методу Морокумы показала, что в энергию  $\Delta E$  двух молекул

вносят значительные вклады все компоненты, за исключением энергии смешивания.

В настоящей работе была проведена оценка энергии взаимодействия двух молекул аланина. Модель димера построена по данным Кембриджской кристаллографической базы данных (рис. 1) [1].

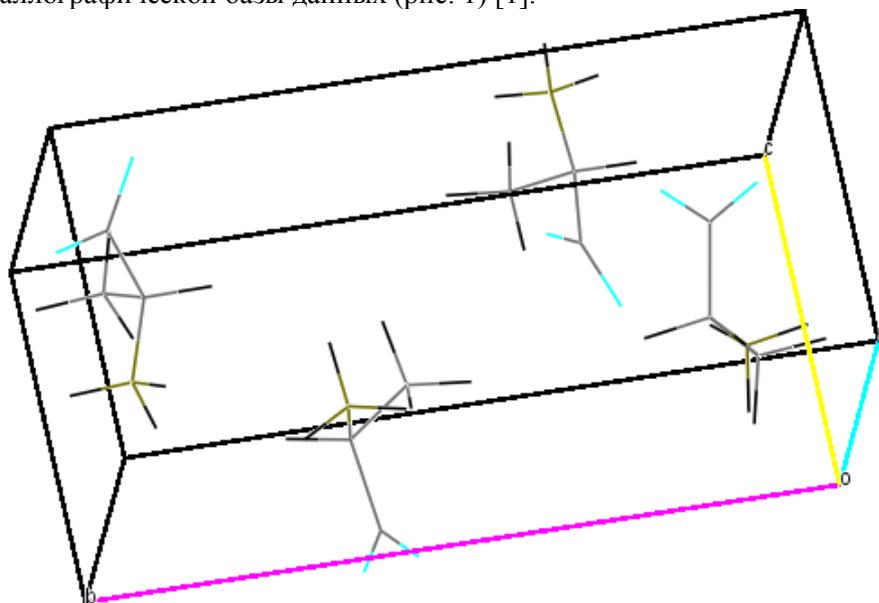


Рис. 1. Кристалл аланина (CCDC) [7]

#### Экспериментальная часть

Квантово-химические расчеты проводились в рамках теории самосогласованного реакционного поля в программе PC GAMESS методом DFT/B3LYP/6-31G (d, p) с полной оптимизацией геометрии без ограничений по симметрии [7].

Расчет энергии взаимодействия в исследуемом ассоциате и ее декомпозиция были проведены по методу Морокумы (HF/6-31G) (PC GAMESS) [9, 10], согласно которому  $\Delta E$  определяется как совокупность (рис. 2):

— электростатической энергии ( $E_{es}$ ) — описывает классическое электростатическое взаимодействие между занятыми молекулярными орбиталями (МО), которое не вызывает их смешение;

— обменной энергии ( $E_{ex}$ ) — описывает взаимодействие между занятыми МО, которое вызывает обмен и делокализацию электронов между молекулами;

— поляризационной энергии ( $E_{pl}$ ) — взаимодействие, которое вызывает смешение между занятыми и вакантными МО в одной молекуле;

— энергии переноса заряда ( $E_{ct}$ ) — взаимодействие, вызывающее межмолекулярную делокализацию путем смешения занятых МО одной молекулы и вакантных МО другой и наоборот;

— энергии обменной поляризации ( $E_{expl}$ ) — вклад оператора обмена, который не является ни чистой поляризацией, ни чистым обменом (без внутримолекулярного возбуждения);

— энергии смешивания ( $E_{mix}$ ).

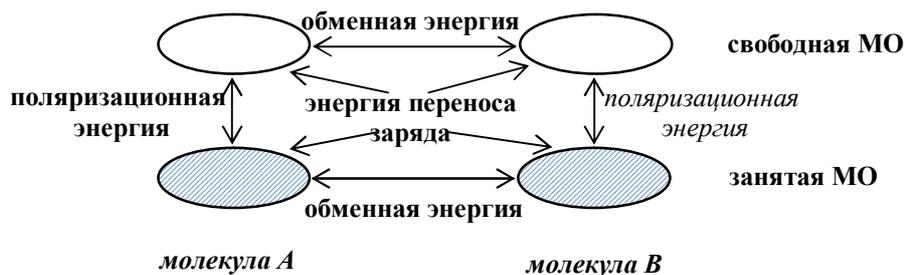


Рис. 2. Энергии взаимодействия по методу Морокумы

Молекулярные орбитали Хартри — Фока в изолированных молекулах используются как базисный набор для проектирования матрицы Фока молекулярного комплекса.

### Полученные результаты и обсуждение

Природа возникновения водородных связей изучена не до конца. Выделяют различные компоненты Н-связи, которые и определяют ее природу: донорно-акцепторное, дисперсионное, электростатическое, поляризационное и обменное взаимодействия [6]. Все составляющие, кроме обменного взаимодействия, повышают энергию водородной связи. Трудно выделить, какая из компонент является преобладающей, особенно в случае слабых Н-связей. Силы электростатических и донорно-акцепторных взаимодействий очень сильно зависят от природы атомов, участвующих в образовании водородной связи, а также геометрических характеристик.

В исследуемом димере аланина (рис. 3) водородная связь образуется между депротонированной карбоксильной группой одной молекулы и протонированной аминогруппой другой. Такая связь называется пептидной водородной связью [5].

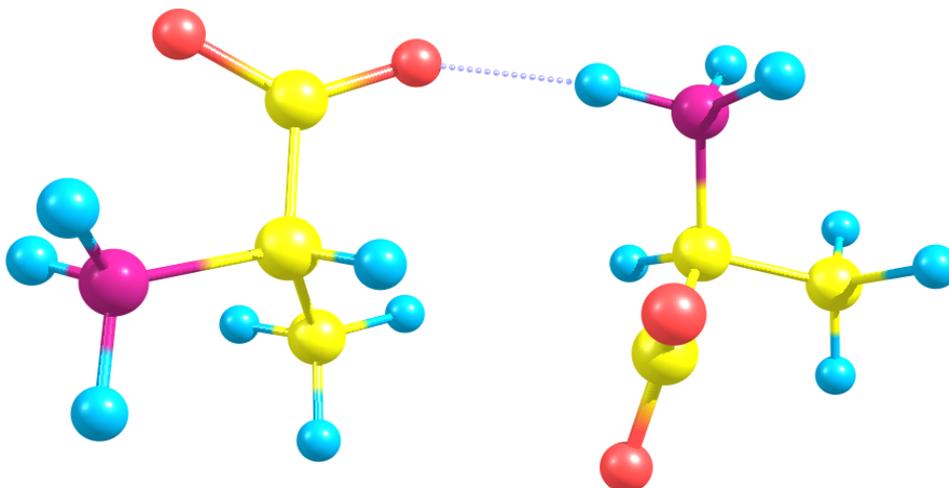


Рис. 3. Модель димера аланина

Таблица 1

**Значение энергии взаимодействия ( $\Delta E$ ) молекул аланина в димере и ее компоненты, ккал/моль**

	$\Delta E^*$	$E_{es}$	$E_{ex}$	$E_{pl}$	$E_{ct}$	$E_{mix}$
<b>Аланин</b>						
После оптимизации геометрии	-13.43 (-10.96)	-14.85	7.52	-2.18	-3.19	-0.24
Без оптимизации геометрии	-15.00 (-12.56)	-15.39	6.18	-2.30	-3.23	-0.26
<b>Глицин [10]</b>						
	-63.13 (-58.28)	-76.66	52.15	-16.81	-19.31	-2.5

\* в скобках приведено значение энергии взаимодействия с учетом BSSE.

$E_{es}$  — электростатическая энергия,  $E_{ex}$  — энергия обменного отталкивания,  $E_{pl}$  — поляризационная энергия,  $E_{ct}$  — энергия переноса заряда,  $E_{mix}$  — энергия смешивания

Как следует из табл. 1, все компоненты энергии взаимодействия двух молекул, за исключением энергии смешивания, дают достаточно большие вклады, причем наибольший вносит электростатическое взаимодействие.

Также следует отметить, что разница энергии взаимодействия оптимизированной и неоптимизированной структуры незначительная (отличаются всего на 1.6 ккал). Распределение компонентов  $\Delta E$  по величинам носит одинаковый характер. Но в случае неоптимизированного димера электростатическое взаимодействие сильнее. Это связано с изменением его структуры, приводящим к разрушению пептидной водородной связи между молекулами (табл. 2).

Таблица 2

**Геометрические характеристики водородной связи в димере аланина**

Параметры водородной связи в димере	$r(N-H \cdots O)$ , Å	$r(N-H)$ , Å	$r(O \cdots H)$ , Å	Угол $(N-H \cdots O)$ , град.
После оптимизации геометрии	2.958	1.020	2.158	134
Без оптимизации геометрии	2.831	1.037	1.823	163

Сравнение энергии взаимодействия молекул в димерах (табл. 1) показало, что  $\Delta E$  глицина значительно превосходит  $\Delta E$  аланина. Это объясняется особенностями строения кристалла глицина и, в частности, большим числом межмолекулярных водородных связей. Также следует отметить, что тенденция распределения компонентов энергии взаимодействия по величинам одинакова у обеих аминокислот.

Таким образом, проведенное исследование показывает, что в кристалле аланина пептидная водородная связь является более слабой по сравнению с глицином.

**Библиографический список**

1. Кембриджская кристаллографическая база данных // Cambridge Crystallographic Data Centre (CCDC). URL: <http://www.ccdc.com.ac.uk> (дата обращения: 14.05.2018).
2. Леонидов Н. Б., Зоркий Т. М., Масунов А. Э., Гладких О. П., Вельский В. П., Дзябченко А. В., Иванов С. А. // Журнал физической химии. 1993. Т. 67, № 12. С. 2464—2468.
3. Леонидов Н. Б., Успенская С. И., Селезнев Н. Г., Гацура С. В. // Российский химический журнал. 1997. Т. XLI, № 5. С. 82—86.
4. Лысенко А. А., Волкова Т. Г. // Теоретическая и экспериментальная химия жидкофазных систем (Крестовские чтения) : тезисы докладов XI Всероссийской школы-конференции молодых ученых, Иваново, 30 октября — 4 ноября, 2017 г. Иваново, 2017. С. 44—45.
5. Baldwin R. L. // The Journal of Biological Chemistry. 2003. Vol. 278, № 20. P. 17581—17588.
6. Gilli G. The nature of the hydrogen bond. Outline of a comprehensive hydrogen bond theory. New York : Oxford University Press, 2009. 317 p.
7. Granovsky A. A. // PCGAMESS v. 7.1.
8. Leonidov N., Obukhova L., Okladnova O., Romanenko E. // Bulletin of Experimental Biology and Medicine. 1999. Vol. 127, № 6. P. 603—606.
9. Morokuma K. *Molecular* // J. Chem. Phys. 1971. Vol. 55, № 3. P. 1236—1244.
10. Morokuma K., Kitaura K. // International Journal of Quantum Chemistry. 1976. Vol. 10, № 2. P. 325—327.

УДК 544.424.2:547.53: 542.944.2:544.362.4

*Е. Н. Крылов, С. В. Ваганова*

**КВАНТОВО-ХИМИЧЕСКАЯ ОТНОСИТЕЛЬНАЯ  
НУКЛЕОФИЛЬНОСТЬ ПОЛИМЕТИЛБЕНЗОЛОВ  
КАК ДЕСКРИПТОР ИХ РЕАКЦИОННОЙ СПОСОБНОСТИ  
ПРИ БРОМИРОВАНИИ В СРЕДЕ АсОН**

Взаимодействие мягких реагентов (полиметилбензолов) с мягким бромлирующим реагентом (молекулярный бром в среде АсОН) адекватно описывается их квантово-химической относительной нуклеофильностью и мягкостью. Между последними двумя квантово-химическими параметрами и относительной реакционной способностью субстратов имеет место четкая симбатная зависимость.

**Ключевые слова:** относительная нуклеофильность, полиметилбензолы, бромирование, реакционная способность.

The interaction of soft reagents (the polymethyl benzenes) with soft bromination reagent (the molecular bromine in ambience of AcOH) is adequately described their quantum-chemical relative nucleophilicity and softness. Between the last two quantum-chemical parameter and relative reaction ability exists clear symbate dependency.

**Key words:** related nucleophilicity, polymethyl benzene, bromination, reaction ability.

---

© Крылов Е. Н., Ваганова С. В., 2018

• Серия «Естественные, общественные науки»

## Введение

Реакционная способность органических соединений и механизмы органических реакций могут быть исследованы и интерпретированы различными методами, в том числе основанными на приложении теории DFT к количественной теории жестких и мягких кислот и оснований [12]. Для описания химической активности молекул методами квантовой химии рассчитываются их параметры, называемые DFT-индексами реакционной способности (ИРС), величины которых характеризуют как активность молекулы в целом, так и активность отдельных реакционных центров (так называемые локальные ИРС).

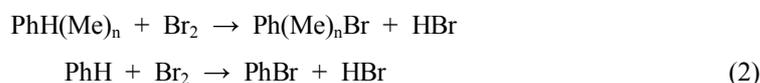
Данные ИРС носят названия «химический электронный потенциал» ( $\mu$ ), «глобальная жесткость» ( $\eta$ ) и «электрофильность» ( $\omega$ ) и представляют собой отнесенные ко всей молекуле или другой химической частице параметры, используемые для предсказания и описания химической реакционной способности и субстратной селективности [3]. К числу таких параметров относится также относительная нуклеофильность  $\omega^-$  [16] (1)

$$\omega^- = 0.5 \cdot \eta(\text{Nu}) \cdot [\mu(\text{Nu}) - \mu(\text{E})]^2 / [\eta(\text{Nu}) + \eta(\text{E})]^2. \quad (1)$$

Здесь  $\eta(\text{Nu})$  и  $\eta(\text{E})$  — жесткость нуклеофила и электрофила,  $\mu(\text{Nu})$  и  $\mu(\text{E})$  — электронные химические потенциалы нуклеофила и электрофила соответственно,  $\mu = 0.5 \cdot [E(\text{HOMO}) + E(\text{LUMO})]$ ,  $\eta = 0.5 \cdot [E(\text{LUMO}) - E(\text{HOMO})]$ ,  $\omega = 0.5 \cdot \mu^2 / \eta$ ,  $E(\text{HOMO})$  — энергия высшей занятой, а  $E(\text{LUMO})$  — энергия низшей вакантной молекулярных орбиталей [14]. Все эти ИРС получены аналитически при решении уравнений Кона — Шэма и дальнейшем анализе зависимостей энергии системы от числа электронов [16].

## Результаты и их обсуждение

В качестве модельной для анализа субстратной селективности реакций ароматического электрофильного замещения выбрана реакция (2) бромирования ароматических субстратов  $\text{PhH}_{6-n}(\text{CH}_3)_n$ , где  $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$  (набор субстратов от бензола до пентаметилбензола, включая все изомеры ди-, три- и тетраметилбензолов). Эта реакция протекает в среде  $\text{AcOH}$  (99.8 мас. %) при действии молекулярного брома в некаталитических условиях при 25 °C в соответствии со схемой (2) [11]. Данная реакция протекает как процесс с механизмом  $\text{Ar-S}_{\text{E}}2$  и сопровождается образованием продуктов бромирования с разнообразным изомерным составом. Субстратная селективность реакции определяется величиной относительной константы скорости  $K_{\text{rel}} = K_{\text{X}}/K_0$ , где  $K_{\text{X}}$  — константы скорости бромирования полиметилбензолов (ПМБ),  $K_0$  — константа скорости бромирования бензола в соответствии со схемой (2).



Расчет структур ароматических соединений проведен программным комплексом ADF 2014.04 [10] на уровне теории M06/6-311++G\*\* в однодетерминантном приближении в рамках метода SMD [18] для учета неспецифической сольватации в среде  $\text{AcOH}$ , которая была использована [11] в качестве реакционной среды для реакции (2) ( $\epsilon = 6.2528$  [8]). Данный метод учета

сольватации считается одним из достаточно точных (до 0.6 — 1.0 ккал/моль [20]) при оценке свободных энергий сольватации.

Расчет структур молекул ПМБ проведен с учетом антибатной относительной ориентации метильных групп, когда соседняя метильная группа ориентируется связью С-Н практически перпендикулярно плоскости ароматического кольца, но в противоположную сторону относительно соседней группы. Такая ориентация метильных групп задавалась в стартовом приближении. Оптимизированная геометрия метильных групп и молекул в целом соответствует литературным данным [19].

**Квантово-химические параметры ПМБ. M06/6-311++G\*\*,  
SMD, AcOH, Hirshfeld [15]**

Структура	E(HOMO)	E(LUMO)	$\mu$	$\eta$
Бензол	-0.26971	-0.03215	-4.1070	3.2322
Толуол	-0.25685	-0.03289	-3.9421	3.0472
1,2-Me <sub>2</sub> Ph	-0.25024	-0.03315	-3.8557	2.9537
1,3-Me <sub>2</sub> Ph	-0.25083	-0.03367	-3.8709	2.9546
1,4-Me <sub>2</sub> Ph	-0.24558	-0.03312	-3.7919	2.8907
1,2,3-Me <sub>3</sub> Ph	-0.24731	-0.03410	-3.8288	2.9009
1,2,4-Me <sub>3</sub> Ph	-0.24097	-0.03387	-3.7394	2.8178
1,3,5-Me <sub>3</sub> Ph	-0.24766	-0.03456	-3.8398	2.8994
1,2,3,4-Me <sub>4</sub> Ph	-0.23881	-0.03485	-3.7234	2.7750
1,2,3,5-Me <sub>4</sub> Ph	-0.23760	-0.03486	-3.7070	2.7584
1,2,4,5-Me <sub>4</sub> Ph	-0.23441	-0.03429	-3.6559	2.7228
1,2,3,4,5-Me <sub>5</sub> Ph	-0.23271	-0.03577	-3.6529	2.6795
Br <sub>2</sub> ...HOСOMe	-0.30154	-0.12821	-5.8471	2.3583

Структура	<b>Q<sub>zz</sub></b>	<i>S</i>	$\omega$	$\omega^-$	logKrel [10]
Бензол	-40.3090	0.3094	2.6093	0.1566	0.00
Толуол	-46.5384	0.3282	2.5500	0.1892	2.78
1,2-Me <sub>2</sub> Ph	-52.8615	0.3386	2.5167	0.2075	3.72
1,3-Me <sub>2</sub> Ph	-52.7871	0.3385	2.5356	0.2044	5.71
1,4-Me <sub>2</sub> Ph	-52.7821	0.3459	2.4871	0.2216	3.40
1,2,3-Me <sub>3</sub> Ph	-59.1498	0.3447	2.5268	0.2136	6.22
1,2,4-Me <sub>3</sub> Ph	-59.1151	0.3549	2.4813	0.2336	6.18
1,3,5-Me <sub>3</sub> Ph	-50.3580	0.3449	2.5426	0.2113	8.28
1,2,3,4-Me <sub>4</sub> Ph	-54.4905	0.3604	2.4979	0.2375	7.04
1,2,3,5-Me <sub>4</sub> Ph	-65.4490	0.3625	2.4909	0.2413	8.62
1,2,4,5-Me <sub>4</sub> Ph	-65.4490	0.3673	2.4544	0.2532	6.45
1,2,3,4,5-Me <sub>5</sub> Ph	-71.7539	0.3732	2.4899	0.2542	8.91
Br <sub>2</sub> ...HOСOMe			7.2486		

*Примечания:* 1.  $\omega^-$  относительно электрофила Br<sub>2</sub>...HOСOMe. **Q<sub>zz</sub>** — компонент тензора квадрупольной поляризуемости в направлении Z (перпендикулярно плоскости ПМБ), D•Å<sup>2</sup> (дебай•ангстрем<sup>2</sup>). *S* — eV<sup>-1</sup>.

2. E(HOMO), E(LUMO) – Hartree,  $\mu$ ,  $\eta$ ,  $\omega$ ,  $\omega^-$  – eV. В комплексе Br<sub>2</sub>...HOСOMe орбитали HOMO и LUMO локализованы на молекуле брома.

В соответствии с теорией химической реактивности [9], между логарифмом относительной константы скорости реакции (logKrel пропорциональны свободным энергиям активации реакций) и указанными ИРС должны

наблюдаться линейные зависимости при условии преимущественной реализации электронного влияния заместителей на течение реакции. Субстратная селективность выражена здесь величиной  $\lg K_{rel}$ .

Зависимость на рис. 1 между относительной нуклеофильностью ПМБ и субстратной селективностью реакции бромирования симбатна в соответствии с физическим смыслом использованного квантово-химического ИРС. Некоторые отклонения от линейной зависимости, наблюдаемые, в частности, для *para*-ксилола (1,4-Me<sub>2</sub>Ph) и родственных по структуре соединений со сходным относительным расположением метильных групп, вызваны стерическими затруднениями *ortho*-расположенных метильных групп при введении сольватированной молекулы брома. Для мезитилена (1,3,5-Me<sub>3</sub>Ph) и аналогичных ему соединений наблюдается некоторое ускорение реакции, вероятно, вследствие наличия совпадающей ориентации метильных групп.

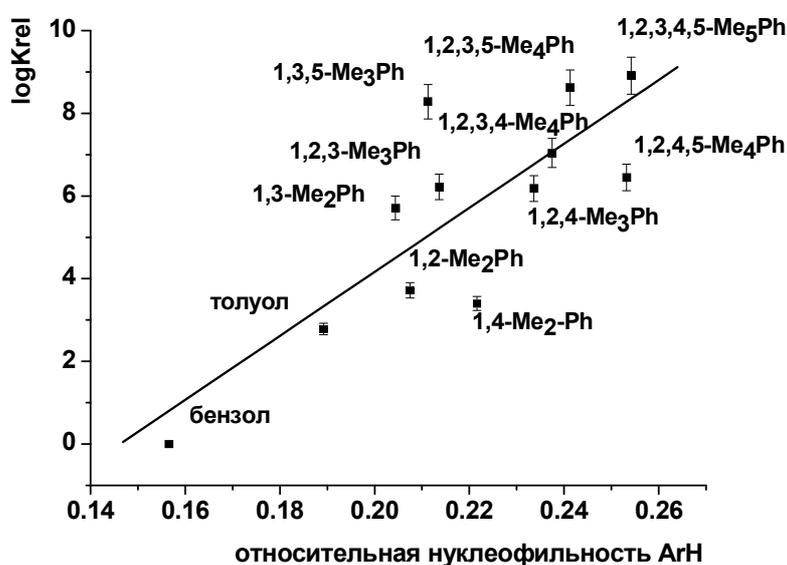


Рис. 1. Относительная константа скорости бромирования ПМБ в среде АсОН как функция относительной нуклеофильности субстратов

$$\log K_{rel} = (-11.31 \pm 3.85) + (77.38 \pm 17.47) \cdot \omega, \quad R = 0.814, \quad SD = 1.627, \\ N = 12, \quad P = 0.0013.$$

Относительная нуклеофильность ПМБ, в свою очередь, определяется (рис. 2) их квантово-химическим параметром, называемом мягкостью ( $S$ ), которая обратно пропорциональна жесткости [9, 13]:  $S = 1/\eta$ .

Корреляция относительной нуклеофильности и мягкости ПМБ (рис. 2) имеет симбатный характер, что соответствует физическому смыслу параметра  $S$  и согласуется с представлением, что эти ароматические соединения — мягкие реагенты (мягкие нуклеофилы) и реагируют с мягким реагентом, каковым является поляризованная молекулой уксусной кислоты молекула брома (рис. 3). Взаимодействие мягкий-мягкий является выгодным с точки зрения теории жестких и мягких кислот и оснований [9, 12, 13], что соответствует симбатности зависимости на рис. 1.

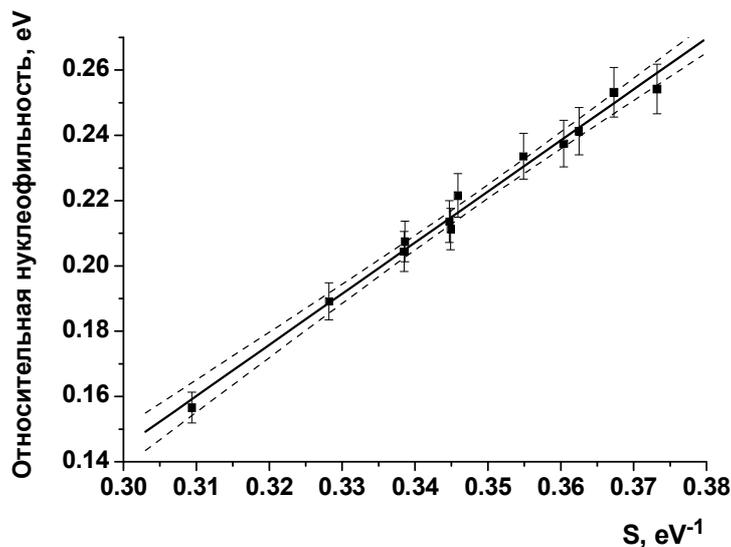


Рис. 2. Относительная нуклеофильность ПМБ как функция мягкости их молекул  
 $\omega = (-0.325 \pm 0.019) + (1.566 \pm 0.054) * S$ ,  $R = 0.994$ ,  $SD = 0.0032$ ,  $N = 12$ ,  $P < 0.0001$

Взаимосвязь между мягкостью молекул ПМБ и компонентом тензора квадрупольной поляризуемости ( $Q_{zz}$ ) антибатна (рис. 4) по причине отрицательности параметра  $Q_{zz}$ . Однако чем больше по модулю этот параметр, тем больше и мягкость, что соответствует физическому смыслу  $Q_{zz}$  как характеристике поляризуемости электронного облака в направлении, перпендикулярном плоскости молекул ПМБ, и физическому смыслу мягкости как полуразности энергий НСМО и ВЗМО.

$$S = (0.243 \pm 0.014) - (0.000187 \pm 0.00025) * Q_{zz}, R = -0.921, \\ SD = 0.00729, N = 12, P < 0.0001.$$

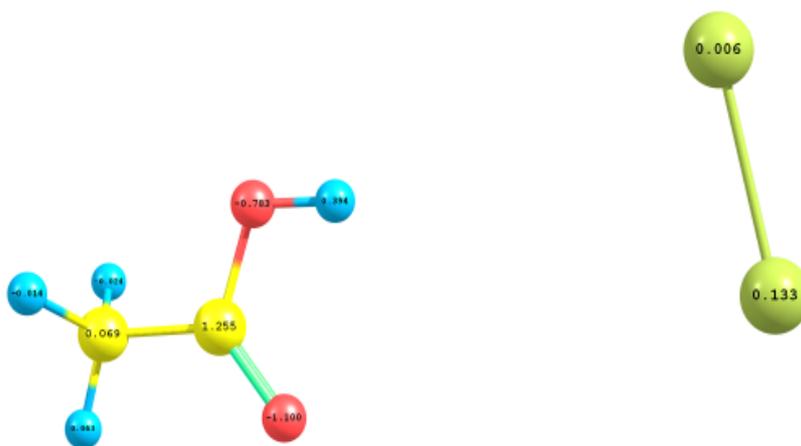


Рис. 3. Молекулярный комплекс AsOH и Br<sub>2</sub>. Показаны заряды в схеме АРТ.  
 Молекула Br<sub>2</sub> поляризована положительно

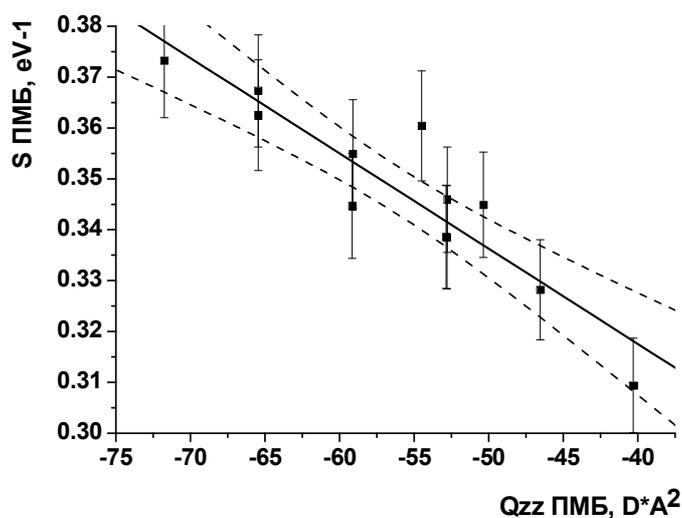


Рис. 4. Мягкость ( $eV^{-1}$ ) как функция  $Q_{zz}$  (дебай\*ангстрем<sup>2</sup>) ПМБ

### Заключение

Таким образом, взаимодействие мягких реагентов, какими являются полиметилбензолы, с мягким бромлирующим реагентом (молекулярный бром в среде  $AcOH$  и поляризованный молекулой  $AcOH$ ) адекватно описывается относительной их нуклеофильностью и мягкостью, поскольку между последними двумя квантово-химическими параметрами и относительной реакционной способностью полиметилбензолов имеет место четкая симбатная зависимость.

Аналогичный подход на основе квантово-химических DFT-индексов реакционной способности был успешно использован при анализе реакционной способности тетразапорфина при бромировании [2], исследовании кислотной диссоциации ароматических сульфокислот и определении их  $pK_a$  [4, 6], нуклеофильного замещения на атоме сульфонильной серы в арилсульфонилгалогенидах [7] и процессов ароматического гидродегалогенирования [1, 5]. Обзоры по некоторым аспектам приложения этого подхода см. [3, 17, 14, 20].

### Библиографический список

1. Груздев М. С., Вирзум Л. В., Крылов Е. Н. Реакция ароматического гидродегалогенирования: квантово-химическая диагностика механизма // Бутлеровские сообщения. 2015. Т. 41, вып. 2. С. 115—120.
2. Ишуткина М. В., Хелевина О. Г., Крылов Е. Н., Александрыйский В. В., Койфман О. И. Бромирование магниевого комплекса 5, 10, 15, 20-тетразапорфина // Журнал органической химии. 2015. Т. 51, вып. 11. С. 1681—1687.
3. Крылов Е. Н. Дескрипторы органических реакций: квантово-химические индексы реакционной способности // Вестник Ивановского государственного университета. Сер.: Естественные, общественные науки. 2014. Вып. 2. С. 39—53.

4. Крылов Е. Н. Диссоциация ароматических сульфокислот в газовой и водной фазах: квантово-химический расчет рKa // Вестник Ивановского государственного университета. Сер.: Естественные, общественные науки. 2015. Вып. 1. С. 32—39.
5. Крылов Е. Н., Вирзум Л. В. Гидродегалогенирование арилгалогенидов как функция МЭП // Отечественная наука в эпоху изменений: постулаты прошлого и теории нового времени : материалы XII Международной научно-практической конференции, Екатеринбург, 7—8 августа 2015 г. / Национальная ассоциация ученых. Екатеринбург, 2015. № 7(12), ч. 3. С. 70—73.
6. Крылов Е. Н., Груздев М. С., Вирзум Л. В. Кислотность ароматических сульфокислот в газовой и водной фазах // Бутлеровские сообщения. 2015. Т. 42, вып. 6. С. 117—123.
7. Морарь А. И., Крылов Е. Н., Вирзум Л. В. Молекулярный электростатический потенциал как дескриптор реакционной способности арилсульфонилгалогенидов // Теоретическая и экспериментальная химия жидкофазных систем (Крестовские чтения) : тезисы докладов X Всероссийской школы-конференции молодых ученых, Иваново, 26—30 октября 2015 г. Иваново, 2015. С. 56—57.
8. Филалков Ю. Я. Растворитель как средство управления химическим процессом. Л. : Химия, 1991. 240 с.
9. A Matter of Density: Expolring the Electron Density Concept in the Chemistry, Biological and Materials Sciences / ed. by N. Sukumar. 2013. Hoboken : J. Wiley and Sons, Inc. 328 p.
10. Baerends E. J. et al. ADF2014. SCM. Theoretical Chemistry. Vrije Universiteit. Amsterdam. The Netherlands. 2014. URL: <http://www.scm.com> (дата обращения: 30.01.2018).
11. Brown H. C., Stock L. M. Relative rates of bromination of benzene and the methylbenzenes. Partial rate factors for the bromination reaction // J. Am. Chem. Soc. 1957. Vol. 79, № 6. P. 1421—1425.
12. Chemical Reactivity Theory : A Density Functional View / ed. by P. K. Chattaraj. Boca Raton: CRC Press, 2009. 610 p.
13. Concepts and methods in modern theoretical chemistry. Electronic structure and reactivity / ed. by S. Ghosh, P. K. Chattaraj. New York : CRC Press, 2013. 450 p.
14. Fuentealba P., David J., Guerra D. Density functional based reactivity parameters // J. Mol. Struct. THEOCHEM. 2010. Vol. 943. P. 127—137.
15. Hirshfeld F. L. Bonded atom fragments for describing molecular charge densities // Theor. Chim. Acta. 1977. Vol. 44, № 1. P. 129—138.
16. Jaramillo P., Fuentealba P., Perez P. Nucleophilicity scale for n- and  $\pi$ -nucleophiles // Chem. Phys. Lett. 2006. Vol. 427, № 4—6. P. 421—425.
17. Liu S.-B. Conceptual density functional theory and some recent developments // Acta Phys.-Chim. Sin. 2009. Vol. 25, № 3. P. 590—600.
18. Marenich A. V., Cramer C. J., Truhlar D. G. Universal solvation model based on solute electron density and on a continuum model of the solvent defined by the bulk dielectric constant // J. Phys. Chem. B 2009. Vol. 113, № 18. P. 6378—6396.
19. URL: <https://chem.nlm.nih.gov/chemidplus/rn/95-63-6> (дата обращения: 05.02.2018).
20. URL: [www.uwyo.edu/kubeka-chem/implicit\\_solvent\\_models](http://www.uwyo.edu/kubeka-chem/implicit_solvent_models) (дата обращения: 28.01.2018).

УДК 544.424.2:544.433.22:544.362.4

*Е. Н. Крылов, С. С. Кильдюшова*

## РЕАКЦИОННАЯ СПОСОБНОСТЬ АРИЛСУЛЬФОНИЛФТАЛИМИДОВ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ С АЛИФАТИЧЕСКИМИ АМИНАМИ

Молекулярный электростатический потенциал (МЭП) является подходящим статическим дескриптором, а относительная нуклеофильность — динамическим дескриптором для описания реакционной способности арилсульфонилфталимидов. Предполагается, что медленной стадией процесса аминолитиза арилсульфонилфталимидов является нуклеофильная атака атома азота амина на сульфонильный атом серы.

**Ключевые слова:** арилсульфонилфталимиды, алифатические амины, реакционная способность, аминолитиз, DFT, относительная нуклеофильность, молекулярный электростатический потенциал.

The molecular electrostatic potential (MEP) is a suitable steady-state descriptor, but relative nucleophilicity is a dynamic descriptor for description of the reactionary ability of aryl sulphonyl phthalimides. It is expected that slow stage of the aminolysis process of aryl sulphonyl phthalimides is nucleophilic attack on the atom of the amino nitrogen atom on the sulfonyl sulfur atom.

**Key words:** aryl sulfonyl phthalimides, aliphatic amines, reactivity, aminolysis, DFT, relative nucleophilicity, molecular electrostatic potential.

### Введение

Для исследования реакционной способности химических структур в последнее время интенсивно используется DFT-теория реакционной способности [6], основанная на достижениях DFT [21, 33] в сочетании с количественной теорией жестких и мягких кислот и оснований Льюиса — Пирсона [9, 23, 24]. Эта теория (далее — ЖМКО) переведена на количественную основу Парром [20] путем введения количественного представления о химической жесткости как параметре, сопутствующем электроотрицательности. Развитие теории функционала плотности в квантовой химии [22], в свою очередь, позволило получить теоретическое обоснование химической реакционной способности [27] в рамках так называемой концептуальной теории DFT [8, 9].

В основе теории лежит расчет квантово-химических индексов реакционной способности (ИРС), представляющих собой частные производные от энергии как функции числа электронов, получаемые решением уравнений Кона — Шэма [12, 15] и превращаемые в аналитически вычисляемые выражения методом конечных разностей [9, 28]. Эти ИРС коррелируют с характеристиками реакционной способности органических соединений, в том числе с позиционной и субстратной селективностью реакций. Поэтому анализ реакционной способности органических соединений может быть проведен как путем расчета поверхности потенциальной энергии (в том числе и для процессов нуклеофильного замещения на атоме сульфонильной серы [1]), так и указанным альтернативным способом [2].

---

© Крылов Е. Н., Кильдюшова С. С., 2018

### Теоретическое введение

Теоретическое обоснование и проверка возможности практического применения ряда молекулярных параметров, называемых дескрипторами или индексами реакционной способности, для описания реакционной способности, механизмов реакций и структур интермедиатов и переходных состояний [3, 6, 30] является одним из направлений, развиваемых в рамках концептуальной DFT. Данные ИРС носят названия: химический электронный потенциал ( $\mu$ ), глобальная жесткость ( $\eta$ ) и электрофильность ( $\omega$ ) и представляют собой глобальные (отнесенные ко всей молекуле или другой химической частице) параметры, используемые для предсказания и описания химической реакционной способности и субстратной селективности [2, 3, 37], определяемые по соотношениям (1—3).

$$\text{Здесь } \mu = 0.5[E(\text{HOMO}) + E(\text{LUMO})], \quad (1)$$

$$\eta = 0.5[E(\text{LUMO}) - E(\text{HOMO})], \quad (2)$$

$$\omega = 0.5 \cdot \mu^2 / \eta. \quad (3)$$

$E(\text{HOMO})$  — энергия высшей занятой молекулярной орбитали,  $E(\text{LUMO})$  — энергия низшей вакантной молекулярной орбитали [7, 30].

Достоинством таких ИРС является их динамический характер, поскольку они характеризуют реакционную способность в динамике перемещения электронной плотности (заряда) [8] и выравнивания электроотрицательности в химическом процессе [13]. Для характеристики активности отдельных реакционных центров и описания позиционной селективности реакций введены локальные интерпретации этих параметров [7, 32], опирающиеся на локальный ИРС — функцию Фукуи (FF) и представляющие собой произведения глобальных параметров на FF. В частности, локальная электрофильность —  $\omega(\text{лок})$  есть характеристика реакционного центра, равная  $\omega(\text{лок}) = FF \cdot \omega$ . К локальным ИРС относится также молекулярный электростатический потенциал (МЭП), точнее, локализованный на конкретных атомах атомный электростатический потенциал (Vesp, АЭП) [3, 6, 18]. Молекулярный электростатический потенциал по определению представляет собой энергию взаимодействия пробного точечного положительного заряда с электростатическим полем атома, около которого помещен этот пробный заряд. Если рассчитанная таким образом энергия отрицательна, то это означает притяжение, а следовательно, понижение общей энергии системы [5]. Соответственно, если при взаимодействии МЭП с пробным точечным положительным зарядом наблюдается повышение энергии, то это соответствует отталкиванию, что, в свою очередь, должно приводить, например, к устранению нуклеофильной частицы из зоны отрицательного МЭП.

МЭП обычно ассоциирован с электроотрицательными атомами (азот, кислород, сульфонильный атом серы), причем в этом регионе молекулы наблюдаются локальные минимумы с более отрицательным значением АЭП по сравнению с окружающим МЭП. Из теории МЭП следует, что распределение МЭП влияет на дальнедействующее взаимодействие реагентов [26], поскольку на дистанциях свыше 3 Å основной вклад во взаимодействие вносят электростатические силы. В современных публикациях [25, 26] МЭП рассматривается как фундаментальный фактор, определяющий природу и поведение атомов и молекул и их способность к межмолекулярным взаимодействиям и молекулярному распознаванию.

Для описания реакционной способности органических соединений МЭП является более подходящим статическим дескриптором по сравнению с зарядом на атомах, поскольку МЭП представляет собой физически наблюдаемую величину [29] в отличие от зарядов, которые квантово-химически не определены, да и величины их очень зависят от методов расчета (в частности, функционалов в теории DFT) и базисов. Известно, например, что шесть различных методов определения заряда дают величину заряда на атоме углерода в нитрометане от  $-0.478$  до  $+0.564$  [31].

В качестве модельной реакции для анализа нуклеофильного замещения на атоме сульфонильной (четырёхкоординированной шестивалентной) серы выбрано взаимодействие замещенных по фенильному фрагменту фенилсульфонилфталимидов с алифатическими аминами [19]. Пример реакции 4-Х-фенилсульфонилфталимида ( $X = \text{Me}, \text{OMe}, \text{H}, \text{Br}, \text{NO}_2$ ) с трет-бутиламином приведен на схеме 1. Две молекулы амина требуются для реализации переноса протона в циклическом переходном состоянии (см. далее).

В цитируемой работе [19] для оценки реакционной способности замещенных фенилсульфонилфталимидов использован корреляционный метод на основе принципа линейности свободных энергий в рамках уравнения Гаммета. Однако диагностика механизма проведена ориентировочно, поскольку данный метод не позволил авторам разделить наиболее вероятные кинетически неразличимые механизмы  $S_N2$  и  $S_{AN}$ .

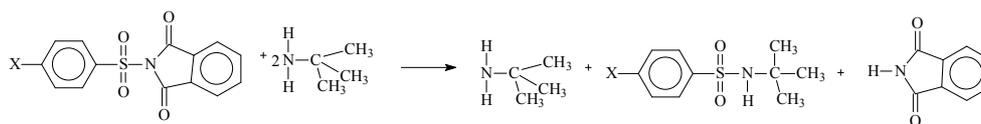


Схема 1. Взаимодействие 4-Х-фенилсульфонилфталимида с трет-бутиламином

### Результаты и их обсуждение

Расчет структур молекул замещенных ( $X\text{PhSO}_2$ )-фталимидов проведен программным комплексом ADF 2014.04 [4] на уровне теории DFT M06/6-311++G\*\* с учетом неспецифической сольватации в рамках метода SMD [16]. Такой метод позволяет рассчитать энергии сольватации с «химической» точностью ( $0.6$ — $1.0$  ккал/моль) [17, 38], что важно при учете влияния среды.

Расчет зарядов в нейтральных структурах проведен в схеме Хиршфельда [11], заряды в которой хорошо физически обоснованы [15]. Функционал M06 использован в связи с рядом его достоинств [36], в частности из-за предсказуемости в ошибках и их минимизацией при определении ряда параметров, в том числе энергий молекул и энергий граничных орбиталей, что удовлетворяет ряду требованиям к функционалам [35]. Кроме того, функционал M06 выбран в связи с воспроизводимостью результатов по используемым в данной работе параметрам [10] для практически всего набора функционалов семейства M06 (за исключением M06-L).

Уровень теории расчета выбран с учетом представления о том, что даже теоретический уровень B3LYP/6-31+G\* достаточен для определения энергий граничных орбиталей, причем эти данные линейно коррелированы на результат расчета этих энергий на уровне aug-cc-pvTZ+1 [34].

Таблица 1

Квантово-химические параметры (4-XPh-SO<sub>2</sub>)фталимидов

X	Q(S)	Q(N)	E(HOMO)	E(LUMO)	V <sub>esp</sub> (S)	V <sub>esp</sub> (N)
4-OMe	0.4648	-0.0805	-0.25919	-0.08834	-59.014098	-18.339354
4-Me	0.4672	-0.0805	-0.27723	-0.08854	-59.012644	-18.338030
H	0.4689	-0.0797	-0.28676	-0.08943	-59.008515	-18.333778
4-Br	0.4721	-0.0806	-0.27806	-0.08980	-58.999446	-18.327724
4-NO <sub>2</sub>	0.4774	-0.0790	-0.29332	-0.11137	-58.984182	-18.313845

X	μ	η	ω	ω <sup>-</sup> (t-BuNH <sub>2</sub> )	ω <sup>-</sup> (Et <sub>2</sub> NH)
4-OMe	-4.728	2.325	4.809	0.0298	0.0549
4-Me	-4.977	2.567	4.823	0.0482	0.0776
H	-5.118	2.685	4.879	0.0604	0.0920
4-Br	-5.005	2.561	4.890	0.0511	0.0813
4-NO <sub>2</sub>	-5.506	2.476	6.123	0.1167	0.1616

Примечание: ω<sup>-</sup>(t-BuNH<sub>2</sub>) и ω<sup>-</sup>(Et<sub>2</sub>NH) — относительная нуклеофильность аминов по отношению к указанным электрофилам [(4-XPh-SO<sub>2</sub>)фталимидам].

Таблица 2

## Квантово-химические параметры алифатических аминов

Амин	Q(N)	E(HOMO)	E(LUMO)	V <sub>esp</sub> (N)
t-BuNH <sub>2</sub>	-0.2394	-0.25942	-0.03288	-18.432097
Et <sub>2</sub> NH	-0.1751	-0.24181	-0.03103	-18.425462
Cyclo-C <sub>6</sub> H <sub>11</sub> NH <sub>2</sub>	-0.2458	-0.25480	-0.03255	-18.432124
1,2-(NH <sub>2</sub> ) <sub>2</sub> - cyclo-C <sub>6</sub> H <sub>10</sub>	-0.2265 (a) -0.2519 (e)	-0.25227	-0.03283	-18.417767 (a) -18.446178 (e)

Примечание: (a) — аксиальная аминогруппа, (e) — экваториальная аминогруппа.

Амин	μ	η	ω
t-BuNH <sub>2</sub>	-3.977	3.082	2.566
Et <sub>2</sub> NH	-3.712	2.868	2.403
Cyclo-C <sub>6</sub> H <sub>11</sub> NH <sub>2</sub>	-3.910	3.024	2.527
1,2-(NH <sub>2</sub> ) <sub>2</sub> -cyclo-C <sub>6</sub> H <sub>10</sub>	-3.879	2.986	2.520

Вероятно, что наиболее активной в транс-1,2-диаминоциклогексане будет экваториальная аминогруппа, имеющая более отрицательный заряд и больший АЭП (табл. 2), однако это предположение, естественно, требует проверки.

Для характеристики относительной реакционной способности аминов по отношению к различным электрофилам — (4-XPh-SO<sub>2</sub>)фталимидам — использован динамический параметр, называемый относительной нуклеофильностью ( $\omega^-$ ) [14], которая определена по соотношению (4) и характеризует относительную активность субстратов и реагентов в процессе передачи электронов в переходных состояниях:

$$\omega^- = 0.5 \cdot \eta(\text{Nu}) \cdot [\mu(\text{Nu}) - \mu(\text{E})]^2 / [\eta(\text{Nu}) + \eta(\text{E})]^2. \quad (4)$$

Кинетические параметры, характеризующие реакционную способность (4-XPh-SO<sub>2</sub>)фталимидов при взаимодействии с рядом алифатических аминов (t-бутиламин, диэтиламин, циклогексиламин, транс-1,2-диаминоциклогексан), взяты из работы [19]. Авторами допускается реализация механизмов S<sub>N</sub>2 или S<sub>A</sub>N, разделение между которыми они не провели. Предполагается лишь, что медленной стадией процесса аминолита является нуклеофильная атака атома азота амина на сульфонильный атом серы.

Поскольку фронтальная атака нуклеофила на реакционный центр должна быть запрещена в связи с наличием фталимидного фрагмента с его обширной электронной системой, взаимодействие должно быть реализовано тыловой атакой неподеленной пары атома азота нуклеофила на орбиталь HСМО+1 фенилсульфонилфталимида, поскольку HСМО этих соединений, как показывает квантово-химический расчет, локализована на фталимидном фрагменте.

Таблица 3

**Кинетические параметры (константы скорости второго порядка К(моль<sup>-1</sup>·с<sup>-1</sup>) взаимодействия (4-XPh-SO<sub>2</sub>)фталимидов и аминов в MeCN при 30 °C [19]**

X	t-BuNH <sub>2</sub>		Et <sub>2</sub> NH		Cyclo-C <sub>6</sub> H <sub>11</sub> NH <sub>2</sub>		транс-1,2-(NH <sub>2</sub> ) <sub>2</sub> - cyclo-C <sub>6</sub> H <sub>11</sub>	
	K	logK	K	logK	K	logK	K	logK
4-OMe	0.47	-0.3279	1.41	0.149	108.63	2.036	102.07	2.009
4-Me	0.68	-0.1675	1.91	0.281	147.78	2.170	123.40	2.091
H	0.87	-0.0605	2.63	0.420	210.64	2.323	204.84	2.311
4-Br	1.29	0.1106	6.06	0.783	363.74	2.561	278.86	2.445
4-NO <sub>2</sub>	3.91	0.5922	10.51	1.022	1093.56	3.039	856.09	2.933

Как показывает симбатная зависимость logK (рис. 1) от величины V<sub>esp</sub>(S) на реакционном центре — атоме сульфонильной серы, нуклеофильная атака атома азота амина на атом серы сульфонилфталимида является определяющей скоростью в соответствии с механизмом S<sub>N</sub>2. В противном случае зависимость на рис. 1 (соотношение 5) была бы антибатной. Однако одновременно корреляции между logK и V<sub>esp</sub>(N) для реагентов (аминов) отсутствуют, вероятно, потому, что выбранные авторами [19] амины не образуют единой реакционной серии.

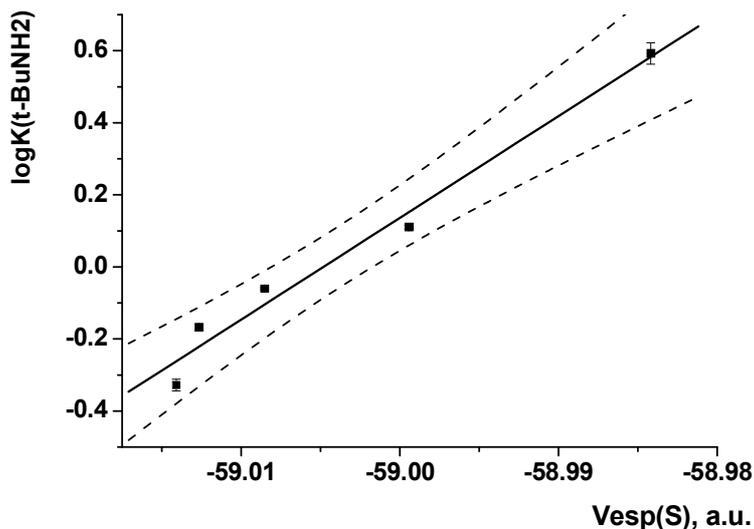


Рис. 1. Реакционная способность (4-XPh-SO<sub>2</sub>)фталимидов при взаимодействии с t-BuNH<sub>2</sub> как функция АЭП Vesp(S) на реакционном центре (атоме сульфонильной серы).

Здесь и далее  $R$  — эмпирический коэффициент корреляции без поправки на объем выборки,  $SD$  — среднее стандартное отклонение по выборке,  $P$  — вероятность случайного появления линейной корреляции

$$\log K = (1666.67 \pm 143.98) + (28.24 \pm 2.44) \cdot \text{Vesp}(S),$$

$$R = 0.989, SD = 0.060, N = 5, P = 0.0014 \quad (5)$$

Поскольку реакция протекает в среде апротонного растворителя — ацетонитрила — протон на атом азота фталимидного фрагмента может передаваться только от второй молекулы амина, чему способствует реализация циклического переходного состояния (рис. 2). На цикличность переходного состояния указывают также высокие значения энтропии активации исследуемой реакции — от  $-106$  до  $-148$  Дж/моль\*К [19].

С этим согласуется малое значение энтропии активации в случае реакции с транс-1,2-диаминоциклогексаном ( $-48$  Дж/моль\*К [19]), поскольку вторая аминогруппа является катализатором переноса протона (рис. 3), вследствие чего наличие второй молекулы амина (приводящее к высоким значениям энтропии активации) в данном случае не требуется.

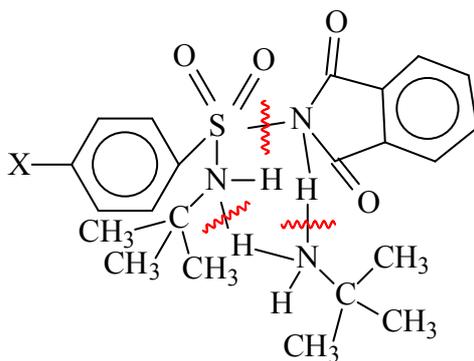


Рис. 2. Модель вероятного переходного состояния аминолиза (4-XPh-SO<sub>2</sub>)фталимидов с участием двух молекул амина (на примере t-BuNH<sub>2</sub>). Выделены разрывающиеся связи

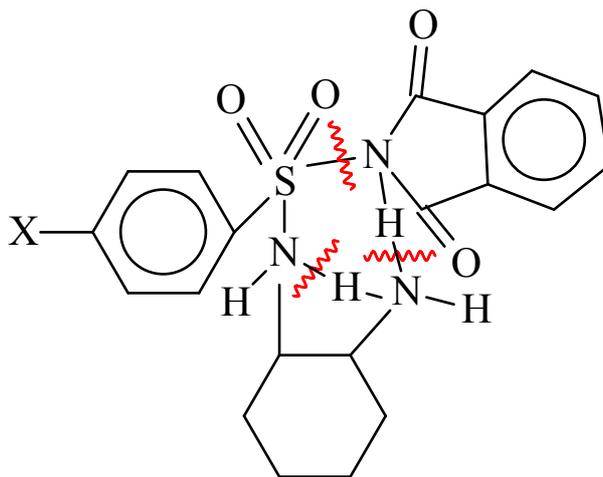


Рис. 3. Модель вероятного переходного состояния аминолиза (4-XPh-SO<sub>2</sub>)фталимидов с участием молекулы транс-1,2-(NH<sub>2</sub>)<sub>2</sub>-сусло-C<sub>6</sub>H<sub>11</sub>

Таким образом, наиболее вероятным механизмом данной реакции представляется согласованный механизм S<sub>N</sub>2 со стадией нуклеофильной атаки как наиболее медленной. Анализ только по соотношению Гаммета не позволяет сделать однозначный вывод, хотя авторами [19] и обнаружено, что увеличение акцепторных свойств заместителя в сульфамидном фрагменте способствует увеличению скорости реакции.

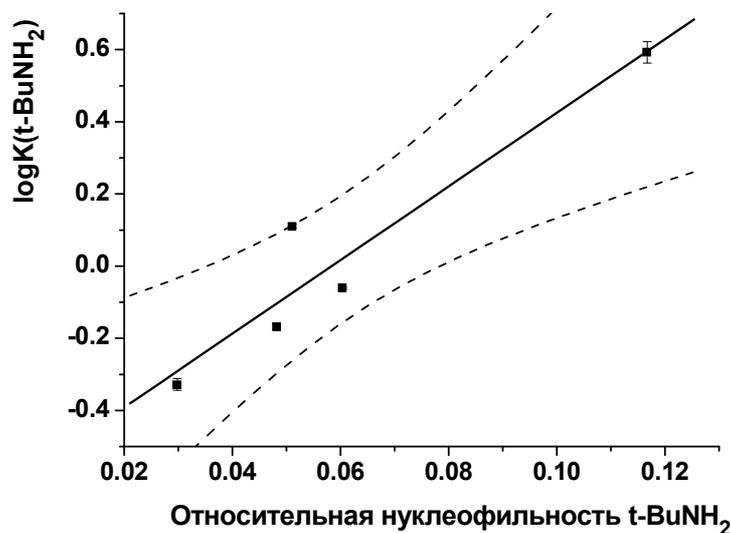


Рис. 4. Реакционная способность (4-XPh-SO<sub>2</sub>)фталимидов при взаимодействии с t-BuNH<sub>2</sub> как функция его относительной нуклеофильности (табл. 1 и 3)

$$\log K = (0.596 \pm 0.128) + (10.204 \pm 1.883) \cdot \omega, \\ R = -0.952, SD = 0.124, N = 5, P = 0.0123. \quad (6)$$

На реализацию механизма, более близкого к  $S_N2$ , указывает также симбатность зависимости реакционной способности (4-XPh-SO<sub>2</sub>)фталимидов от относительной нуклеофильности *t*-BuNH<sub>2</sub> (рис. 4, соотношение 6) и от относительной нуклеофильности Et<sub>2</sub>NH (рис. 5, соотношение 8). В противном случае эта зависимость была бы антибатной.

Для более активного диэтиламина чувствительность реакции к изменению относительной нуклеофильности амина, численно выражаемая коэффициентом в корреляционных уравнениях (7) и (8) при параметре  $\omega^-$ , меньше (8.37), чем для менее активного *t*-BuNH<sub>2</sub> (10.2), что согласуется с соблюдением принципа активность — селективность.

Однако для гораздо более активного циклогексиламина этот коэффициент (11.23, уравнение 7) сопоставим и даже немного более такового для гораздо менее активного трет-бутиламина (10.20). По всей видимости, эти амины не образуют единой реакционной серии из-за весьма заметных различий в структурах. Это согласуется с фактом отсутствия корреляции между logK и Vesp(N) для реагентов (аминов) (см. выше).

$$\log K(\text{cyclo-C}_6\text{H}_{11}\text{NH}_2) = 1.590 \pm 0.058 \pm (11.233 \pm 0.728) \cdot \omega^-(\text{cyclo-C}_6\text{H}_{11}\text{NH}_2), \\ R = 0.996, SD = 0.050, N = 4, P = 0.004. \quad (7)$$

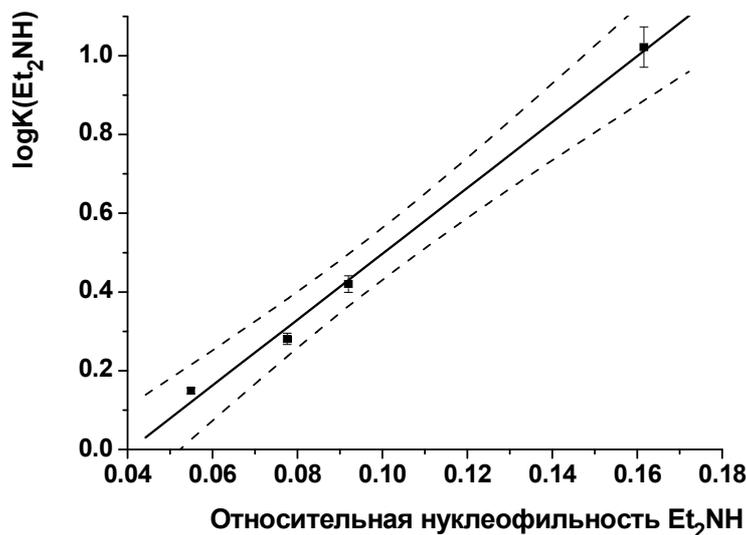


Рис. 5. Реакционная способность (4-XPh-SO<sub>2</sub>)фталимидов при взаимодействии с Et<sub>2</sub>NH как функция его относительной нуклеофильности (табл. 1 и 3)

$$\log K = (-0.339 \pm 0.040) \pm (8.365 \pm 0.384) \cdot \omega^-(\text{Et}_2\text{NH}), R = 0.997, SD = 0.031, \\ N = 4, P = 0.0021. \quad (8)$$

### Заключение

Таким образом, применение квантово-химических индексов реакционной способности, таких как атомный электростатический потенциал и относительная нуклеофильность, позволяет диагностировать механизм реакции нуклеофильного замещения на атоме сульфонильной серы в замещенных N-фенилфталимидах как механизм  $S_N2$  в соответствии с диаграммой О'Феррала — Дженкса.

## Библиографический список

1. Кочетова Л. Б., Кустова Т. П., Калинина Н. В. Квантово-химическая интерпретация реакционной способности алифатических аминов и  $\alpha$ -аминокислот в ацилировании // Известия АН. Сер.: Химия. 2009. Вып. 4. С. 725—729.
2. Крылов Е. Н. Дескрипторы органических реакций: квантово-химические индексы реакционной способности // Вестник Ивановского университета. Сер.: Естественные, общественные науки. 2014. Вып. 2. С. 39—53.
3. A matter of density. Exploring the electron density concept in the chemistry, biological and materials sciences / ed. by N. Sukumar. Hoboken : J. Wiley and Sons, Inc., 2013. 328 p.
4. Vaerends E. J., et al. ADF2014. SCM. Theoretical Chemistry. Vrije Universiteit. Amsterdam. The Netherlands. 2014. URL: <http://www.scm.com>. (дата обращения: 12.01.2018).
5. Bonaccorsi R., Scrocco E., Tomasi J. Molecular SCF Calculations for the Ground State of Some Three-Membered Ring Molecules:  $(\text{CH}_2)_3$ ,  $(\text{CH}_2)_2\text{NH}$ ,  $(\text{CH}_2)_2\text{NH}_2^+$ ,  $(\text{CH}_2)_2\text{O}$ ,  $(\text{CH}_2)_2\text{S}$ ,  $(\text{CH}_2)_2\text{CH}_2$  and  $\text{N}_2\text{CH}_2$  // J. Chem. Phys. 1970. Vol. 52, iss. 10. P. 5270—5284.
6. Concepts and methods in modern theoretical chemistry. Electronic structure and reactivity / ed. by S. K. Ghosh, P. K. Chattaraj. New York : CRC Press, 2013. 450 p.
7. Fuentealba P., David J., Guerra D. Density functional based reactivity parameters // J. Mol. Struct. THEOCHEM. 2010. Vol. 943, № 1—3. P. 127—137.
8. Geerlings P., De Proft F. Chemical reactivity as described by quantum chemical methods // Int. J. Mol. Sci. 2002. Vol. 3, № 4. P. 276—309.
9. Geerlings P., De Proft F., Langenaeker W. Conceptual Density Functional Theory // Chem. Rev. 2003. Vol. 103, № 5. P. 1793—1873.
10. Glossman-Mitnik D. Computational study of the chemical reactivity properties of the Rhodamine B molecule // Procedia Computer Science. 2013. Vol. 18, № 1. P. 816—825.
11. Hirshfeld F. L. Bonded atom fragments for describing molecular charge densities // Theor. Chim. Acta. 1977. Vol. 44, № 1. P. 129—138.
12. Hohenberg P., Kohn W. Inhomogeneous electron gas // Phys. Rev. 1964. Vol. 136, № 3. P. B864—B871.
13. Islam N., Chosh D. C. On the Electrophilic Character of Molecules Through Its Relation with Electronegativity and Chemical Hardness // Int. J. Model. 2012. Vol. 13, № 2. P. 2160—2175.
14. Jaramillo P., Fuentealba P., Perez P. Nucleophilicity scale for  $n$ - and  $\pi$ -nucleophiles // Chem. Phys. Lett. 2006. Vol. 427, № 4—6. P. 421—425.
15. Liu S.-B. Conceptual density functional theory and some recent developments // Acta Phys.-Chim. Sin. 2009. Vol. 25, № 3. P. 590—600.
16. Marenich A. V., Cramer C. J., Truhlar D. G. Universal Solvation Model Based on Solute Electron Density and on a Continuum Model of the Solvent Defined by the Bulk Dielectric Constant and Atomic Surface Tensions // J. Phys. Chem. B 2009. Vol. 113, № 18. P. 6378—6396.
17. Mennucci, B., Cammi R. Continuum Solvation Models in Chemical Physics : From Theory to Applications. Chichester : John Wiley & Sons, 2008. P. 65—80.
18. Molecular electrostatic potentials. Concepts and applications / ed. by J. S. Murray, K. Sen. Amsterdam : Elsevier, 1996. 664 p.
19. Ozturk O., Kutuk H. The synthesis of arylsulfonylphtalimides and their reactions with several amines in acetonitrile // Int. J. Org. Chem. 2011. Vol. 1, № 12. P. 202—206.
20. Parr R. G., Pearson R. G. Absolute Hardness: Companion Parameter to Absolute Electronegativity // J. Am. Chem. Soc. 1983. Vol. 105, № 26. P. 7512—7516.
21. Parr R. G., Yang W. Density Functional Theory of Atoms and Molecules. New York : Oxford University Press, 1989. P. 352.

22. *Parr R. G., Yang W.* Density-functional theory of the electronic structure of molecules // *Ann. Rev. Phys. Chem.* 1995. Vol. 46. P. 701—728.
23. *Pearson R. G.* Hard and Soft Acids and Bases // *J. Am. Chem. Soc.* 1963. Vol. 84, № 22. P. 3533—3539.
24. *Pearson R. G.* Chemical hardness : applications from molecules to solids. Weinheim : Wiley-VCH, 1997. P. 198.
25. *Politzer P., Murray J. S.* The fundamental nature and role of the electrostatic potential in atoms and molecules // *Theor. Chem. Acc.* 2002. Vol. 108, № 3. P. 134—142.
26. *Politzer P., Murray J. S.* Molecular electrostatic potentials. Some observations // *Concepts and methods in modern theoretical chemistry*; ed. by S. K. Ghosh, P. K. Chattaraj. New York : CRC Press, 2013. P. 181—199.
27. *Rong Ch., Lu T., Liu S.-B.* Dissecting molecular descriptors into atomic contributions in density functional reactivity theory // *J. Chem. Phys.* 2014. Vol. 140, iss. 2. P. 024109-1—024109-9.
28. *Sabin J. R., Trickey S. B., Apell S. P., Oddershede J.* Molecular shape, capacitance, and chemical hardness // *Int. J. Quant. Chem.* 2000. Vol. 77, № 1. P. 358—366.
29. *Stewart R. F.* On the mapping of electrostatic properties from Bragg diffraction data // *Chem. Phys. Lett.* 1979. Vol. 65, № 2. P. 335—342.
30. *Theoretical aspects of chemical reactivity* / ed. by A. Toro-Labbe. Amsterdam : Elsevier, 2007. P. 321.
31. *Wiberg K. B., Rablen P. R.* Comparison of atomic charges derived via different procedures // *J. Comput. Chem.* 1993. Vol. 14, № 2. P. 1504—1518.
32. *Yang W., Parr R. G.* Hardness, softness, and the Fukui function in the electronic theory of metals and catalysis // *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* 1985. Vol. 82, № 14. P. 6723—6726.
33. *Yung D. C.* Computational chemistry. New York : Wiley J. & Sons Inc., 2001. P. 380.
34. *Zhan C.-G., Nicols J. A., Dixon D. A.* Ionization potential, electron affinity, electronegativity, hardness and electron excitation energy: molecular properties from density functional theory orbital energies // *J. Phys. Chem. A* 2003. Vol. 107, № 20. P. 4184—4195.
35. *Zhang C., Nusgrave C. B.* Comparison of DFT methods for molecular orbital eigenvalue calculation // *J. Phys. Chem. A* 2007. Vol. 111, № 8. P. 1554—1561.
36. *Zhao Y., Truhlar D. G.* Application and validation of the Minnesota functionals // *Chem. Phys. Lett.* 2011. Vol. 502, iss. 1—3. P. 1—13.
37. *Zielinski F., Tognetti V., Joubert L.* Condensed descriptors for reactivity: a methodological study // *Chem. Phys. Lett.* 2012. Vol. 527, № 2. P. 67—72.
38. URL: [www.uwyo.edu/kubeka-chem/implicit\\_solvent\\_models](http://www.uwyo.edu/kubeka-chem/implicit_solvent_models) (дата обращения: 28.01.2018).

## АДАПТИВНЫЙ МЕТОД УДВОЕНИЯ РАЗМЕРА ИЗОБРАЖЕНИЯ

Предложена адаптивная линейная интерполяционная формула для удвоения размера изображений. Проведен сравнительный анализ данного метода с линейной интерполяцией.

**Ключевые слова:** адаптивная интерполяция, линейная интерполяция, градиент, среднеквадратичное отклонение.

The adaptive linear interpolation formula for image upscaling was proposed. Also was produced the comparative analysis for proposed method with linear interpolation.

**Key words:** adaptive interpolation, linear interpolation, gradient, mean square error.

### Введение

На сегодняшний день существует множество методов масштабирования изображений. Широко известны классические алгоритмы, такие как метод ближайшего соседа, линейная и кубическая интерполяции. Данные подходы достаточно эффективны с точки зрения быстродействия и простоты, но имеют ряд недостатков (эффект Гиббса, алиасинг, размытие), проявляющихся в визуальном качестве при увеличении изображений (в большей мере на границах). Эти недостатки принято называть артефактами.

Все интерполяционные алгоритмы можно разбить на две категории — адаптивные и неадаптивные. Цель адаптивных методов состоит в более точной аппроксимации на границах, что ведет к редуцированию артефактов.

В работе предложена адаптивная интерполяционная формула для увеличения размера изображения вдвое. Метод представляет собой обобщение идей линейной интерполяции и интерполяции вдоль прямой, ортогональной направлению градиента [2, 3]. Был проведен сравнительный анализ точности аппроксимации предложенного алгоритма с линейной интерполяцией.

Алгоритм удвоения размера изображения включает в себя следующие шаги:

- 1) инициализация четных точек значениями исходного изображения;
- 2) вычисление значений в нечетных точках;
- 3) вычисление значений в нечетно-четных и четно-нечетных точках.

Нами рассматривается вычисление значений только в нечетных точках и предполагается, что первый шаг выполнен.

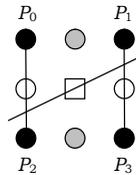
### 1. Формула адаптивной линейной интерполяции

Пусть  $p_0, p_1, p_2$  и  $p_3$  — известные значения интенсивностей в четных точках. Тогда аппроксимацией градиента будем называть вектор

$$(G_x, G_y) = (p_0 - p_1 + p_2 - p_3, p_0 + p_1 - p_2 - p_3), \quad (1)$$

где  $G_x$  и  $G_y$  — аппроксимации производных по направлению  $x$  и  $y$  соответственно.

Положим координаты искомой точки  $g$  (на рисунке обозначена квадратом) в начало координат. Относительно  $g$  точки  $p_0, p_1, p_2$  и  $p_3$  (черные круги на рисунке) имеют координаты:  $(-1, 1), (1, 1), (-1, -1)$  и  $(1, -1)$ .



Обозначим две пары отрезков, построенных по данным точкам, таким образом:

$$u = (p_0, p_1), \quad d = (p_2, p_3), \quad l = (p_0, p_2), \quad r = (p_1, p_3).$$

Для интерполяции значений на отрезках будем использовать следующие формулы (линейная интерполяция):

$$f_u(x) = \frac{(p_1 - p_0) \cdot x + p_1 + p_0}{2},$$

$$f_d(x) = \frac{(p_3 - p_2) \cdot x + p_3 + p_2}{2},$$

$$f_l(x) = \frac{(p_0 - p_2) \cdot x + p_0 + p_2}{2},$$

$$f_r(x) = \frac{(p_1 - p_3) \cdot x + p_1 + p_3}{2}.$$

Пусть  $L$  — прямая, ортогональная вектору (1) и проходящая через начало координат. Тогда интерполяцию  $g$  будем проводить по одной из двух пар отрезков ( $u$  и  $d$  либо  $l$  и  $r$ ), пересекаемых прямой  $L$ . Для рассматриваемых случаев (пересечений прямой с отрезками) получим пару формул:

$$g_0 = \frac{f_d(-\frac{G_x}{G_y}) + f_u(\frac{G_x}{G_y})}{2}, \quad (2)$$

$$g_1 = \frac{f_l(-\frac{G_y}{G_x}) + f_r(\frac{G_y}{G_x})}{2}. \quad (3)$$

Подставив  $G_x$  и  $G_y$  в (2) и (3), получим:

$$g_0 = \frac{p_0 \cdot p_1 - p_2 \cdot p_3}{G_y},$$

$$g_1 = \frac{p_0 \cdot p_2 - p_1 \cdot p_3}{G_x}.$$

Если  $G_x = G_y = 0$ , то формулы являются неопределенными. В таких случаях аппроксимация  $g$  будет вычисляться как среднеарифметическое

значений  $p_0, p_1, p_2$  и  $p_3$ . Таким образом, формула адаптивной линейной интерполяции будет иметь вид:

$$g(p_0, p_1, p_2, p_3) = \begin{cases} \frac{p_0 \cdot p_1 - p_2 \cdot p_3}{p_0 + p_1 - p_2 - p_3}, & \text{если } |G_y| > |G_x| \text{ и } G_y \neq 0, \\ \frac{p_0 \cdot p_2 - p_1 \cdot p_3}{p_0 + p_2 - p_1 - p_3}, & \text{если } |G_x| > |G_y| \text{ и } G_x \neq 0, \\ \frac{p_0 + p_1 + p_2 + p_3}{4} & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (4)$$

## 2. Качество интерполяции

Пусть  $F$  — изображение (тройка матриц целых чисел) размера  $m \times n$ , тогда алгоритм оценки качества предложенного метода включает в себя следующие шаги:

1) посредством прореживания  $F$  получим уменьшенное вдвое изображение  $R$ ;

2) увеличив в два раза размер  $R$ , получим изображение  $\hat{F}$ , которое является аппроксимацией  $F$ ;

3) вычислим оценку качества интерполяции в нечетных точках (среднеквадратичное отклонение):

$$Q(F, \hat{F}) = 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{m \cdot n} \sum_{i=0}^{n/2} \sum_{j=0}^{m/2} (F(2i + 1, 2j + 1) - \hat{F}(2i + 1, 2j + 1))^2}. \quad (5)$$

## 3. Результаты

Для оценки качества предложенной формулы использовался набор из 13 стандартных фотореалистичных изображений [1].

Значения (5) представлены в таблице.

Изображение	L	A	L + G	A + G
Airplane	8.766	8.718	4.277	4.196
Car	12.020	12.154	5.460	5.534
Couple	8.975	8.889	4.060	3.984
Girl	8.711	8.583	3.936	3.830
House	10.842	10.636	4.206	3.951
Lake	13.488	13.670	5.403	5.484
Lena	7.902	7.623	3.588	3.286
Mandrill	24.023	24.606	8.394	8.435
Peppers	8.591	8.421	3.466	3.261
Splash	6.173	5.942	2.705	2.487
Tiffany	8.429	8.371	3.085	2.938
Tree	14.737	14.446	6.862	6.569
Woman	7.409	7.255	3.329	3.230
Среднее	10.774	10.717	4.521	4.399

В приведенной таблице  $L$  — качество линейной интерполяции,  $A$  — качество предложенной адаптивной интерполяции (4),  $L + G$  и  $A + G$  — качество линейной и адаптивной интерполяций для изображений, сглаженных фильтром Гаусса (с размером ядра  $3 \times 3$ ).

Так как на изображениях присутствует неаппроксимируемый шум (например, импульсный), предварительная фильтрация исходных изображений при оценке качества интерполяционной формулы имеет смысл.

В среднем (для нечетных точек) предложенная формула (4) дает более точную аппроксимацию, чем билинейная интерполяция при одинаковом числе интерполяционных узлов.

Используя аналогичный подход, для конфигурации точек, состоящей из 16 узлов, можно получить обобщение алгоритмов [2, 3].

#### Библиографический список

1. Набор тестовых изображений. URL: [http://math.ivanovo.ac.ru/dalgebra/Khashin/bmp\\_ex/index.html](http://math.ivanovo.ac.ru/dalgebra/Khashin/bmp_ex/index.html) (дата обращения: 03.04.2018).
2. Jing L., Zongliang G., Xiuchang Z. Directional bicubic interpolation — a new method of image super-resolution // Proc. of 3rd Intern. Conf. on Multimedia Technology (ICMT-13). Atlantis Press, 2013. P. 470–477.
3. Zhou D., Shen X., Dong W. Image zooming using directional cubic convolution interpolation // IET Image Processing. 2012. Vol. 6, № 6. P. 627–634.

УДК 519.852

А. Ф. Вялов

## СИМПЛЕКС-АЛГОРИТМ И ПОЛНОСТЬЮ ВЫРОЖДЕННАЯ ЗАДАЧА

Для исследования задачи линейного программирования введено понятие направления в  $n$ -мерном пространстве. Доказано что полностью вырожденная задача имеет особое решение и играет важную роль в анализе общей задачи линейного программирования. Решена полностью вырожденная задача. Выводы подчеркивают ценность исследования полностью вырожденной задачи.

**Ключевые слова:** линейное программирование, оптимальное управление, оптимизация.

For a problem of linear programming research the concept of a direction in  $n$ -dimensional space is entered. It is proved that completely degenerate problem has a special solution and plays an important role in the analysis of the general problem of linear programming. The degenerate problem is solved completely. Conclusions underline value of research completely degenerate problem.

**Key words:** linear programming, optimum control, optimization.

В задаче линейного программирования (ЗЛП) [1, 3]: найти минимум линейной формы или, как говорят, функции цели

$$(C, X) \rightarrow \min \quad (1)$$

при ограничениях на  $X$  в виде системы  $m < n$  линейных уравнений

$$AX = B \quad (2)$$

и системы  $n$  неравенств

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3)$$

числовая строка  $C = (c_1, c_2, \dots, c_n)$  определяет направление возрастания функции цели в  $n$ -мерном евклидовом пространстве  $E_n$ .

Система линейных уравнений заранее преобразована:  $\text{rk } A = m$ .

В линейной алгебре элементом евклидова пространства  $E_n$  является числовая строка, состоящая из  $n$  чисел. Под направлением в пространстве  $E_n$  будем понимать нормированную строку чисел, например  $C/|C|$ . В геометрическом пространстве  $E_n$  направление — вектор единичной длины, исходящий из точки  $O$ .

Геометрическое пространство  $E_n$  можно представлять себе не только как множество точек, но, например, как множество лучей, проведенных из точки  $O$  во всевозможных направлениях, так как любая точка в  $E_n$  принадлежит одному из этих лучей [2].

Одновременно вводится изоморфное евклидово пространство векторов из геометрического пространства, элементом которого является вектор, проведенный из точки  $O$  в точку с координатами, указанными в числовой строке.

Обозначим нулевую числовую строку  $O = (0, \dots, 0)$ .

Известно, что система  $m$  линейных уравнений (2), если  $B \neq O$ , описывает сдвинутое подпространство  $E_{n-m}$  пространства  $E_n$  как результат пересечения  $m$  гиперплоскостей в  $E_n$ .

Система неравенств (3) описывает<sup>1</sup> неотрицательный  $n$ -мерный конус  $K$ . Вершина конуса  $K$  — точка  $O$ .

Пересечение подпространства  $E_{n-m}$  с конусом  $K$  есть либо выпуклое многогранное множество точек (числовых строк)  $M$  размерности<sup>2</sup>  $n - m$  (иначе говоря,  $M$  — фрагмент сдвинутого подпространства  $E_{n-m}$ ), либо пустое множество (конус и подпространство не пересекаются).

Исследуем, как, используя симплекс-алгоритм, решить полностью вырожденную ЗЛП, в которой система линейных уравнений имеет вид  $AX = O_m$ . О том, что это — особая задача, говорит следующая

**Теорема.** *Задача линейного программирования может быть полностью вырожденной только изначально.*

Предположим противное: изначально ограничения в задаче  $AX = B$ ,  $B \neq O_m$ , и после нескольких шагов симплекс-алгоритма оказалось, что  $D(AX) = O_m$  ( $\det D \neq 0$ ). Это означает невозможное  $DB = O_m$ .

Множество направлений, в которых можно провести луч из точки  $O$  в конусе  $K$ , обозначим  $L$ . Конус  $K$  также является множеством лучей в  $E_n$ .

Фрагмент  $M$  подпространства  $E_{n-m}$  полностью вырожденной ЗЛП есть результат пересечения подпространства  $E_{n-m}$  (решения системы однородных линейных уравнений) с конусом  $K$ , описанным в (3). Пересечение никогда не пусто<sup>3</sup>.

Множество направлений подпространства  $E_{n-m}$  содержит направления из подмножества  $L$  множества направлений конуса  $K$ . Лучи, проведенные в  $E_{n-m}$  из точки  $O$  в этих направлениях, образуют конус  $M$ .

Пересечение  $M$  — конус, состоящий из лучей с вершиной в начале системы координат  $O$  пространства  $E_n$ , потому что лучи, проведен-

<sup>1</sup> Если строки в матрице  $A$  линейно независимы.

<sup>2</sup> Вообще говоря, размерность фрагмента  $M$  лежит в диапазоне  $[0, n - m]$ .

<sup>3</sup> В ЗЛП (1)–(3) может быть пусто.

ные в  $E_{n-m}$  в остальных направлениях из множества направлений подпространства  $E_{n-m}$ , имеют с конусом  $K$  одну общую точку  $O$ .

Анализ возможных множеств  $M$  в полностью вырожденной ЗЛП приводит к заключению: функция цели  $(C, X^*) = 0$  и решение  $X^* = O$ , либо функция цели на множестве  $M$  неограниченно убывает  $(C, X) \rightarrow -\infty$ , у задачи нет решения. Второе происходит только тогда, когда множество  $M$  содержит луч, направленный в сторону убывания функции цели, т. е.  $(C, G) < 0$ , где  $G$  — направление луча.

Если в  $M$  невозможно провести луч в направлении  $G$  таким, что  $(C, G) < 0$ , но  $M$  содержит луч с направлением  $G^*$ ,  $(C, G^*) = 0$ , то весь этот луч (каждая точка луча) есть решение ЗЛП.

Если в  $M$  все лучи направлены в сторону возрастания функции цели (для любого луча из  $M$  выполняется  $(C, G) > 0$ , где  $G$  — направление луча) или в  $M$  невозможно провести луч, то решение ЗЛП —  $X^* = O$ .

Применение симплекс-алгоритма к решению полностью вырожденной ЗЛП характеризуется отсутствием этапа 1, в котором вводится искусственный базис. Поэтому необходимо лишь привести матрицу  $A$  к каноническому виду  $\tilde{A}$ . В  $\tilde{A}$  первые столбцы образуют единичную подматрицу.

Затем, решив измененную (изменения коснулись лишь системы уравнений) задачу:

$$(C, Y) \rightarrow \min, \quad (4)$$

$$\tilde{A}Y = B \quad (5)$$

(подпространство  $AY = O$  сдвинуто), где  $b_1, \dots, b_m$  — случайные положительные числа;

$$y_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (6)$$

получим<sup>4</sup>: функция цели — либо  $(C, Y^*) = \text{const}$ , либо  $(C, Y) \rightarrow -\infty$ .

Первому решению измененной задачи (функция цели  $(C, Y^*) = \text{const}$ ) в исходной полностью вырожденной ЗЛП соответствует  $X^* = O$  и функция цели  $(C, X^*) = 0$ . Второму  $(C, Y) \rightarrow -\infty$  соответствует  $(C, X) \rightarrow -\infty$ .

**Примечание.** Случайные положительные числа  $b_1, \dots, b_m$  не обязаны быть малыми. Это видно из импликации

$$k\tilde{A}Y = kB \Rightarrow \tilde{A}(kY) = kB.$$

Точка  $X = (b_1, \dots, b_m, 0, \dots, 0)$  принадлежит и конусу  $K$ , и сдвинутому подпространству (5).  $X$  — числовая строка сдвига подпространства  $AY = O_m$ .

Пусть полностью вырожденная ЗЛП не имеет решения. Тогда множество направлений конуса  $M$  этой задачи содержит направление  $G \in L$ ,  $(C, G) < 0$  и в  $M$  из точки  $O$  можно провести луч в этом направлении, движение по которому приведет к неограниченному убыванию целевой функции. Проведем луч в  $E_n$  в направлении  $G$  из точки  $X$ ; он принадлежит конусу  $K$  и сдвинутому подпространству (5), так как множество направлений сдвинутого подпространства (5) тоже содержит направление  $G$ .

Обратное доказывается, если провести луч из точки  $O$  в том же самом направлении, что и в измененной задаче.

<sup>4</sup>Вероятность вырождения в процессе решения практически равна нулю, так как  $b_1, \dots, b_m$  — случайные числа с длинной мантиссой.

**Выводы.** То, будет ли у задачи линейного программирования решение или нет (функция цели  $(C, X) \rightarrow -\infty$ ), не зависит от  $B$ , а определяется лишь  $A$  и  $C$ . Матрица  $B$  влияет на то, пусто множество  $M$  или нет.

#### Библиографический список

1. Гасс С. Линейное программирование : (методы и приложения). М. : Физматгиз, 1961. 303 с.
2. Гельфанд И. М. Лекции по линейной алгебре. М. : ГИТТЛ, 1951. 252 с.
3. Даницг Дж. Линейное программирование, его применения и обобщения. М. : Прогресс, 1966. 600 с.

УДК 519.67

В. Д. Голубев, С. И. Хашин

## ЧИСЛА, ПСЕВДОПРОСТЫЕ ПО ФРОБЕНИУСУ, БЕЗ БОЛЬШИХ ДЕЛИТЕЛЕЙ

Доказано, что если метод Фробениуса проверки чисел на простоту ошибается на некотором числе  $n \equiv 3 \pmod{4}$ , то у него обязательно есть простой делитель, больший 2707. Таким образом, найден еще один факт, свидетельствующий в пользу гипотезы о том, что чисел, псевдопростых по Фробениусу, не существует.

**Ключевые слова:** проверка простоты числа, метод Фробениуса, метод Миллера — Рабина.

It is proved that if the Frobenius method of primality test have an error on number  $n \equiv 3 \pmod{4}$ , then it necessarily has a prime divisor greater than 2707. Thus, we find one more fact that supports the hypothesis that there are no Frobenius pseudoprimes.

**Key words:** prime numbers, primality test, Frobenius method, Miller — Rabin method.

### 1. Введение

**Определение 1.** Пусть  $n$  — нечетное натуральное число, не являющееся полным квадратом. Его *индексом Фробениуса*  $\text{Ind}_F(n)$  будем называть наименьшее среди чисел  $[-1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots]$  такое, что символ Якоби  $J(c/n) \neq 1$ .

**Определение 2.** Пусть  $n$  — нечетное натуральное число, не являющееся полным квадратом, и пусть  $c = \text{Ind}_F(c)$  — его индекс Фробениуса. Пусть

$$z = \begin{cases} 2 + \sqrt{c}, & c = -1, 2; \\ 1 + \sqrt{c}, & c \geq 3. \end{cases}$$

Будем называть  $n$  *простым по Фробениусу* [2, 3, 6], если

$$z^n \equiv \bar{z} \pmod{n}.$$

**Определение 3.** Если составное число просто по Фробениусу, то будем называть его *псевдопростым по Фробениусу (Frobenius pseudoprime, FPP)*.

**Пример 1.** Пусть  $n = 19$ . Тогда  $c = -1$ ,  $z = 2 + i$ ,  

$$z^n = -3565918 + 2521451i \equiv 2 - i \pmod{n}.$$

**Пример 2.** Пусть  $n = 33$ . Тогда  $c = -1$ ,  $z = 2 + i$ ,  

$$z^n \equiv 2 + 22i \not\equiv \bar{z} \pmod{n}.$$

**Пример 3.** Пусть  $n = 17$ . Тогда  $c = 3$ ,  $z = 1 + \sqrt{3}$ ,  

$$z^n = 13160704 + 7598336\sqrt{3} \equiv 1 - \sqrt{3} \pmod{n}.$$

Известно [3], что не существует FPP, меньших  $2^{64}$ . Также доказано [1], что не существует кратных множителей, меньших  $2^{32}$ .

В настоящей работе рассматриваются числа  $n$ , псевдопростые по Фробениусу, такие, что  $n \equiv 3 \pmod{4}$ , и доказывается, что у них обязательно должен быть простой множитель, больший 2707.

## 2. Согласованные простые делители

Пусть  $n$  есть FPP и пусть  $p$  — его простой делитель. Тогда

$$n \equiv p \pmod{Q_p},$$

где  $Q_p$  — порядок числа  $z$  по модулю  $p$ .

Если мы рассмотрим два простых делителя  $p_1$  и  $p_2$ , то получим:

$$n \equiv p_1 \pmod{Q_{p_1}},$$

$$n \equiv p_2 \pmod{Q_{p_2}}.$$

Объединяя эти два сравнения, получим:

$$p_1 \equiv p_2 \pmod{\text{GCD}(Q_{p_1}, Q_{p_2})}.$$

Такую пару простых чисел будем называть согласованной.

## 3. Алгоритм работы

Представим алгоритм для поиска псевдопростых по Фробениусу чисел. Возьмем 30 000 простых чисел, у которых индекс Фробениуса равен  $-1$ , т. е.  $n \equiv 3 \pmod{4}$ , будем называть их допустимыми.

Будем предполагать, что  $n$  раскладывается на нечетное количество различных допустимых множителей  $n = p_0 p_1 \cdots p_k$ . Как было сказано выше, каждая пара этих простых чисел должна быть согласованной.

Алгоритм состоит в переборе всех подмножеств множества допустимых простых чисел, каждая пара в котором является согласованной.

Возьмем допустимое  $p_0$ . Строим для него список согласованных с ним чисел. Выбираем из него по очереди всевозможные числа  $p_1$ , согласованные с  $p_0$ , и строим список чисел, согласованных с  $p_0, p_1$ . Выбираем из него по очереди всевозможные  $p_2$ , строим список согласованных с  $p_0, p_1, p_2$  чисел. Проверяем, не является ли произведение чисел  $p_0 p_1 p_2$  FPP.

Далее выбираем из построенного списка по очереди  $p_3$ . Строим список согласованных чисел с  $p_0, p_1, p_2, p_3$  и т. д., пока не переберем все.

Алгоритм был реализован с помощью обхода дерева в глубину:

- 1) пытаемся добавить еще один множитель в произведение, т. е. увеличить текущее количество согласованных сомножителей, при этом заполняя массив, состоящий из простых чисел;
- 2) если добавить сомножитель не получается, пытаемся «пойти вправо» на дереве;
- 3) если «пойти вправо» не получается, то уменьшаем высоту и снова идем вправо.

#### 4. Результаты работы

Для реализации описанных алгоритмов была написана программа на языке C++ (Visual C++ 2013 [4]). Для работы с числами произвольной длины на сегодняшний день наиболее популярны и эффективны библиотеки GMP [5] и MPIR [7]. В нашем случае более подходящей оказалась библиотека MPIR.

Вычисления были выполнены на компьютере с процессором Intel® Pentium® CPU G4500 @ 3.50GHz.

При всех вычислениях требуемое количество памяти было сравнительно незначительным, нигде не требовался даже 1 Гбайт, поэтому объемом памяти ограничителем не являлся, проблему составляло только время работы.

Если взять одну сотню простых чисел (максимальное  $p = 1223$ ), то полный перебор всех возможных произведений — менее минуты. Но для обработки 200 простых чисел (до 2707) потребовалось уже более суток! Учитывая столь быстрый рост объема вычислений, следует признать, что дальнейшее увеличение границы подобным способом практически невозможно. Для этого требуется разработать существенно более эффективные методы.

В результате работы программы получились следующие результаты: не существует чисел, псевдопростых по Фробениусу, раскладывающихся в произведение множителей, каждый из которых не превосходит 2707.

Таким образом, найден еще один факт, свидетельствующий в пользу гипотезы о том, что чисел, псевдопростых по Фробениусу, не существует.

#### Библиографический список

1. *Хашин С. И.* Кратные множители псевдопростых чисел // Вестник Ивановского государственного университета. Сер.: Естественные, общественные науки. 2013. Вып. 2. С. 102–107.
2. *Хашин С. И.* Натуральные числа с большим индексом Фробениуса // Вестник Ивановского государственного университета. Сер.: Естественные, общественные науки. 2015. Вып. 2. С. 75–78.
3. *Хашин С. И., Хашина Ю. А.* Свойства чисел, псевдопростых по Фробениусу // Вестник Ивановского государственного университета. Сер.: Естественные, общественные науки. 2014. Вып. 2. С. 104–108.
4. Центр загрузки Microsoft. URL: <https://www.microsoft.com/ru-ru/download> (дата обращения: 20.03.2018).
5. GMP: The GNU Multiple Precision Arithmetic Library. URL: <http://gmplib.org> (дата обращения: 20.03.2018).
6. *Khashin S. I.* Counterexamples for Frobenius primality test // arXiv:1307.7920. URL: <https://arxiv.org/abs/1307.7920> (дата обращения: 06.04.2018).
7. MPIR: Multiple Precision Integers and Rationals. URL: <http://www.mpir.org> (дата обращения: 20.03.2018).

УДК 517.94

Н. Г. Косарев, Д. В. Туртин

## ОБ ОДНОЙ ОЦЕНКЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ С МИНИМАЛЬНЫМ РОСТОМ ПО ПАРАМЕТРУ

Получена точная оценка сверху решения системы линейных дифференциальных уравнений с комплексным параметром. Эта оценка позволяет доказать теорему о неединственности решения задачи Коши для системы уравнений в частных производных.

**Ключевые слова:** характеристическое уравнение, диаграмма Ньютона, последовательные приближения, дифференциальные неравенства.

A sharp upper estimate of the solution of a system of the differential equations with complex parameter is obtained. This estimate makes possible to proof non-uniqueness solution the theorem of Cauchy problem for system of partial differential equations.

**Key words:** characteristic equation, chart of Newton, successive approximation, differential inequalities.

### Введение

Оценки решений дифференциальных уравнений, выполняющиеся при всех значениях аргумента и при некоторых значениях входящего в уравнение комплексного параметра, достаточно часто встречаются в различных разделах анализа. В случае, когда в линейном обыкновенном дифференциальном уравнении зависимость коэффициентов от комплексного параметра  $\lambda$  полиномиальная, наиболее общий результат таких оценок получен в [2] и [3]. Отметим, что оценки решений таких уравнений зависят от роста по  $\lambda$  при  $\lambda \rightarrow \infty$  корней соответствующих характеристических уравнений. Этот рост определяется диаграммой Ньютона характеристического уравнения. В [2] и [3] все корни характеристического уравнения имели одинаковый порядок роста по  $\lambda$  при  $\lambda \rightarrow \infty$ . При этом была получена оценка сверху фундаментальной матрицы решений уравнения.

В [4] рассмотрено дифференциальное уравнение с характеристическим уравнением, имеющим корни различного порядка роста по  $\lambda$ . Если к такому уравнению применить методы, изложенные в [2, 3], то для решений уравнения получается оценка с максимальным порядком роста по  $\lambda$  при  $\lambda \rightarrow \infty$ . Естественно возникает вопрос: существуют ли решения таких уравнений с минимальным порядком роста по  $\lambda$ ? В данной работе показано, что такие решения существуют для некоторого класса линейных систем с переменными растущими коэффициентами. Для решения одного уравнения такая оценка получена в [6].

### Теорема об оценке

Рассмотрим систему уравнений

$$Y^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m_k} A_{kj}(x) \lambda^j Y^{(k)}, \quad (1)$$

где  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\operatorname{Re} \lambda > \alpha > 0$ ,  $m_0 > m_k$  ( $k = \overline{0, n-1}$ ),  $A_{kj}(x)$  — квадратные матрицы порядка  $s$  с элементами — непрерывными комплекснозначными функциями.

Обозначим

$$Y^{(k)}(x, \lambda) = Y_k(x, \lambda) \quad (k = \overline{0, n-1}),$$

$$\bar{Y}(x, \lambda) = (Y_0(x, \lambda), \dots, Y_{n-1}(x, \lambda))^T$$

и обычным образом сведем (1) к системе уравнений первого порядка

$$\bar{Y}'(x, \lambda) = A(x, \lambda)\bar{Y}(x, \lambda), \tag{2}$$

где матрица  $A(x, \lambda)$  имеет вид

$$A(x, \lambda) = \begin{pmatrix} O & E & O & \dots & O \\ O & O & E & \dots & O \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ O & O & O & \dots & E \\ \Delta_1(x, \lambda) & \Delta_2(x, \lambda) & \Delta_3(x, \lambda) & \dots & \Delta_n(x, \lambda) \end{pmatrix},$$

причем

$$\Delta_{i+1}(x, \lambda) = \sum_{j=0}^{m_i} A_{ij}(x)\lambda^j \quad (i = \overline{0, n-1}),$$

$O$ ,  $E$  — соответственно нулевая и единичная матрицы размерности  $s \times s$ .

В случае, когда (1) — скалярное уравнение ( $A_{kj}(x) = a_{kj}(x)$ ,  $s = 1$ ), соответствующее (1) характеристическое уравнение имеет вид

$$P(x, \lambda) = \omega^n - \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m_k} a_{kj}(x)\lambda^j \omega^k = 0. \tag{3}$$

Введем основные обозначения для диаграммы Ньютона [8] уравнения (3). Пусть «верхняя» часть диаграммы при любом  $x$  имеет одни и те же узловые точки  $(k_l, m_{k_l})$ , определяющие  $N$  ее звеньев ( $l = \overline{0, N}$ ), и  $(\alpha_{lj}, m_{\alpha_{lj}})$  — точки, соответствующие некоторым мономам многочлена  $P(x, \lambda)$  и лежащие на  $l$ -м звене ( $l = \overline{1, N}$ ,  $j = \overline{1, q_l}$ ,  $q_l = k_l - k_{l-1}$ ,  $\alpha_{lq_l} = k_l$ ) диаграммы Ньютона этого многочлена, причем  $\alpha_{l0} < \alpha_{l1} < \dots < \alpha_{lq_l}$ .

Пусть  $\gamma_l$  — тангенсы углов, образованных  $l$ -м звеном диаграммы и отрицательным направлением оси абсцисс ( $\gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_N$ ). Известно [8], что  $\gamma_l$  — показатели асимптотического разложения корней уравнения (3) по степеням  $\lambda$  в окрестности точки  $\lambda = \infty$ .

Ранее в [5] было показано, что диаграммы Ньютона уравнения (3) и характеристического для (1) уравнения

$$\det \left\{ \omega^n E - \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m_k} A_{kj}(x)\lambda^j \omega^k \right\} = 0 \tag{4}$$

подобны с коэффициентом подобия  $s$ . Поэтому введенные выше обозначения характеристик диаграмм Ньютона многочлена  $P(x, \lambda)$  можно сохранить для многочлена  $\Delta(x, \lambda)$  с учетом подобия: длины звеньев увеличиваются в  $s$  раз, а показатели  $\gamma_l$  сохраняются.

Положим  $d_k = m_{k_{l-1}} + (k_{l-1} - k)\gamma_l$  при каждом  $k$ :  $k_{l-1} \leq k \leq k_l$  ( $l = \overline{1, N}$ ) и обозначим

$$\Gamma_1(l) = \{k : k_{l-1} \leq k \leq k_l, m_k = d_k\}, \quad \Gamma_1 = \bigcup_{l=1}^N \Gamma_1(l), \\ \Gamma_2 = \{0, 1, \dots, n\} \setminus \Gamma_1.$$

Будем рассматривать только такие системы вида (1), у которых матрицы  $A_{kj}(x)$  удовлетворяют условиям:

- 1)  $A_{km_k}(x) \equiv A_{km_k}$  при  $k \in \Gamma_1$ ;
- 2) уравнения

$$\det \left\{ \sum_{k \in \Gamma_1(l)} A_{km_k} \beta^{k-k_{l-1}} \right\} = 0 \quad (l = \overline{1, N})$$

не имеют кратных корней и

$$\det(A_{k_l m_{k_l}}) \neq 0 \quad (l = \overline{1, N}); \quad (5)$$

- 3) элементы  $a_{pq}^{kj}(x)$  матриц  $A_{kj}(x)$  удовлетворяют оценкам:

$$\max_{|x| \leq r} |a_{pq}^{kj}(x)| \leq h^{p_0(d_k-j)}(r), \quad (6)$$

где  $h(r) > 0$  ( $r > 0$ ) — непрерывная монотонно возрастающая функция,  $j = \overline{0, m_k}$  при  $k \in \Gamma_2$ ,  $j = \overline{0, m_k - 1}$  при  $k \in \Gamma_1$ ,  $p_0 = \gamma_1^{-1}$ .

Заметим, что из условий 1 и 2 следует, что диаграмма Ньютона многочлена  $\Delta$  при любом  $x$  ( $x \in R$ ) имеет одни и те же узловые точки.

Определим функцию  $g(r)$  соотношением

$$h(g(r)) = r^{\gamma_1} \quad (r > 0). \quad (7)$$

Оценку решения системы уравнений (1) при  $\operatorname{Re} \lambda \geq \alpha > 0$  получим отдельно для случаев  $|x| \leq g(|\lambda|)$  и  $|x| \geq g(|\lambda|)$ .

**Лемма 1.** Пусть для матриц  $A_{kj}(x)$  выполнены условия 1–3. Тогда система уравнений (1) при всех  $\lambda$ :  $\operatorname{Re} \lambda > \alpha$  ( $\alpha$  — достаточно велико) и  $|x| \leq g(|\lambda|)$  имеет решение  $Y(x, \lambda)$  такое, что

$$\|Y^{(j)}(x, \lambda)\| \leq c_1 |\lambda|^{j\gamma_N} e^{c_2 |\lambda|^{\gamma_1} |x|} \quad (8)$$

( $j = \overline{0, n-1}$ ,  $c_1 > 0$ ,  $c_2 > 0$ ).

*Доказательство.* Известно [5], что если для матриц  $A_{kj}(x)$  системы уравнений (1) выполнено условие 3), то при  $|x| \leq g(|\lambda|)$  характеристическое уравнение (4) имеет  $sn$  корней  $\omega_{lj}$  вида

$$\omega_{lj}(x, \lambda) = \beta_{lj} \lambda^{\gamma_l} (1 + o(1)), \quad (9)$$

где  $\beta_{lj}$  — корни уравнений (5),  $l = \overline{1, N}$ ,  $j = \overline{1, sq_l}$ ,  $o(1)$  — функции переменных  $x$  и  $\lambda$ , стремящиеся к нулю при  $\lambda \rightarrow \infty$ ,  $|x| \leq g(|\lambda|)$ . Введем еще несколько обозначений. Пусть  $i \in \{1, \dots, sn\}$ . Тогда при некоторых  $l$  и  $j$  имеет место равенство

$$i = \sum_{p=0}^{l-1} sk_p + j \quad (l = \overline{1, N}; j = \overline{1, sq_l}),$$

в соответствии с которым обозначим  $\omega_i(x, \lambda) = \omega_{lj}(x, \lambda)$ . Далее положим  $\epsilon_i = \gamma_l$  при  $sk_{l-1} + 1 \leq i \leq sk_l$  ( $l = \overline{1, N}$ ).

Пусть  $W(x, \lambda)$  — нормальная жорданова форма матрицы  $A(x, \lambda)$  системы (2), а  $B(x, \lambda)$  — матрица, преобразующая  $A(x, \lambda)$  к этой форме.

Имеем

$$A(x, \lambda)B(x, \lambda) = B(x, \lambda)W(x, \lambda). \quad (10)$$

Заметим, что  $W(x, \lambda)$  — блочно-диагональная матрица, каждый диагональный блок которой есть диагональная матрица вида

$$W_l(x, \lambda) = \text{diag}\{\omega_{l1}(x, \lambda), \dots, \omega_{ls}(x, \lambda)\} \quad (l = \overline{1, N}),$$

а остальные блоки — нулевые.

Матрицу  $B(x, \lambda)$  будем искать в блочном виде с блоками  $B_{il}$  тех же размеров, что и у матриц  $A$  и  $W$ . Тогда систему (10) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} B_{il} &= B_{1l}W_l^{i-1} \quad (i = \overline{2, n}, l = \overline{1, n}), \\ \sum_{i=1}^n \Delta_i B_{1l}W_l^{i-1} &= B_{1l}W_l^n \quad (l = \overline{1, n}). \end{aligned}$$

Положим

$$\begin{aligned} Q(\lambda) &= \text{diag}\{Q_1(\lambda), \dots, Q_n(\lambda)\}, \quad Q_t = \lambda^{v_t} E, \\ v_1 &= 0, \quad v_t = \sum_{k=2}^t \varepsilon_k - (t-1)\varepsilon_t \quad (t = \overline{2, n}). \end{aligned}$$

Заменой

$$\bar{Y}(x, \lambda) = B(x, \lambda)Q(\lambda) \exp \left\{ \int_0^x s_1(t, \lambda) dt \right\} \bar{Z}(x, \lambda) \quad (11)$$

от системы (2) перейдем к системе

$$\bar{Z}'(x, \lambda) = W(x, \lambda)\bar{Z}(x, \lambda) + C(x, \lambda)Z(x, \lambda), \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} W(x, \lambda) &= \text{diag}\{0, \omega_2(x, \lambda) - \omega_1(x, \lambda), \dots, \omega_{sn}(x, \lambda) - \omega_1(x, \lambda)\}, \\ C(x, \lambda) &= -(B(x, \lambda)Q(\lambda))^{-1} (B(x, \lambda)Q(\lambda))', \\ \bar{Z}(x, \lambda) &= (z_1(x, \lambda), \dots, z_{sn}(x, \lambda))^T. \end{aligned}$$

Далее доказательство разобьем на два случая:

$$0 \leq x \leq g(|\lambda|) \quad \text{и} \quad -g(|\lambda|) \leq x \leq 0.$$

Пусть  $0 \leq x \leq g(|\lambda|)$ . Известно [5], что на лучах  $\arg \lambda = \psi$ , за исключением конечного их числа, величины  $\text{Re}(\omega_i - \omega_j)$  ( $i \neq j$ ) сохраняют знак при достаточно большом  $|\lambda|$  и  $|x| \leq g(|\lambda|)$ . От системы (12) перейдем к си-

стеме интегральных уравнений

$$\begin{aligned}
 z_1(x, \lambda) &= 1 + \int_0^x \sum_{j=1}^{sn} c_{1j}(t, \lambda) z_j(t, \lambda) dt, \\
 z_i(x, \lambda) &= \int_0^x \exp \left\{ \int_t^x (\omega_i(\tau, \lambda) - \omega_1(\tau, \lambda)) d\tau \right\} \sum_{j=1}^{sn} c_{ij}(t, \lambda) z_j(t, \lambda) dt, \\
 &\quad \text{если } i = \overline{2, sn}, \operatorname{Re}(\omega_i - \omega_1) < 0, \\
 z_i(x, \lambda) &= \int_0^{g(|\lambda|)} \exp \left\{ \int_t^0 (\omega_i(\tau, \lambda) - \omega_1(\tau, \lambda)) d\tau \right\} \sum_{j=1}^{sn} c_{ij}(t, \lambda) z_j(t, \lambda) dt - \\
 &\quad - \int_x^{g(|\lambda|)} \exp \left\{ \int_t^x (\omega_i(\tau, \lambda) - \omega_1(\tau, \lambda)) d\tau \right\} \sum_{j=1}^{sn} c_{ij}(t, \lambda) z_j(t, \lambda) dt, \\
 &\quad \text{если } i = \overline{2, sn}, \operatorname{Re}(\omega_i - \omega_1) > 0.
 \end{aligned} \tag{13}$$

Очевидно, что всякое решение системы (13) является решением уравнения (12). Систему (13) будем решать методом последовательных приближений. Положим  $z_1^{(0)}(x, \lambda) = 1$ ,  $z_i^{(0)}(x, \lambda) = 0$  ( $i = \overline{2, sn}$ ),  $z_i^{(k+1)}(x, \lambda)$  выражаются через  $z_i^{(k)}(x, \lambda)$  по формулам, получающимся при подстановке в систему (13) вместо  $z_i(x, \lambda)$  в левые ее части функций  $z_i^{(k+1)}(x, \lambda)$ , а в правые части — функций  $z_i^{(k)}(x, \lambda)$ . Тогда

$$z_i(x, \lambda) = z_i^{(0)}(x, \lambda) + \sum_{k=1}^{\infty} (z_i^{(k)}(x, \lambda) - z_i^{(k-1)}(x, \lambda)).$$

Обозначим

$$\begin{aligned}
 \eta_i^{(k)}(x, \lambda) &= z_i^{(k)}(x, \lambda) - z_i^{(k-1)}(x, \lambda), \\
 \eta_k(\lambda) &= \max_{|x| \leq g(|\lambda|)} \max_{1 \leq i \leq sn} |\eta_i^{(k)}(x, \lambda)|.
 \end{aligned}$$

Оценим величины  $\eta_k(\lambda)$ . Из рекуррентных соотношений для  $z_i^{(k)}$  ( $i = \overline{1, sn}$ ,  $k = 0, 1, \dots$ ) и известной [5] оценки для элементов  $c_{ij}(x, \lambda)$  ( $i, j = \overline{1, sn}$ ) матрицы  $C(x, \lambda)$ :

$$\int_{-g(|\lambda|)}^{g(|\lambda|)} |c_{ij}(x, \lambda)| dx = o(1)$$

( $o(1) \rightarrow 0$  при  $\lambda \rightarrow \infty$ ) следует

$$|\eta_i^{(k)}(x, \lambda)| \leq o(1) \eta_{k-1}(\lambda), \quad i = \overline{1, sn}.$$

Поэтому  $\eta_k(\lambda) \leq o(1) \eta_{k-1}(\lambda)$ ,  $o(1) \rightarrow 0$  при  $\lambda \rightarrow \infty$  и  $|x| \leq g(|\lambda|)$ . Так как

$$|z_i(x, \lambda) - z_i^{(0)}(x, \lambda)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k(\lambda) = o(1),$$

то при  $0 \leq x \leq g(|\lambda|)$  имеем

$$z_1(x, \lambda) = 1 + o(1), \quad z_i(x, \lambda) = o(1) \quad (i = \overline{2, sn}). \tag{14}$$

Заметим, что асимптотические формулы (14) получены для решения системы (13) с начальным условием

$$z_1(0, \lambda) = 1, \quad z_i(0, \lambda) = 0 \quad (i = \overline{2, sn}). \quad (15)$$

В случае  $-g(|\lambda|) \leq x \leq 0$  вместо системы (13) рассмотрим систему интегральных уравнений

$$\begin{aligned} z_1(x, \lambda) &= 1 + \int_0^x \sum_{j=1}^{sn} c_{1j}(t, \lambda) z_j(t, \lambda) dt, \\ z_i(x, \lambda) &= \int_0^x \exp \left\{ \int_t^x (\omega_i(\tau, \lambda) - \omega_1(\tau, \lambda)) d\tau \right\} \sum_{j=1}^{sn} c_{ij}(t, \lambda) z_j(t, \lambda) dt, \\ &\text{если } i = \overline{2, sn}, \operatorname{Re}(\omega_i - \omega_1) > 0 \\ z_i(x, \lambda) &= - \int_{-g(|\lambda|)}^0 \exp \left\{ \int_t^0 (\omega_i(\tau, \lambda) - \omega_1(\tau, \lambda)) d\tau \right\} \sum_{j=1}^{sn} c_{ij}(t, \lambda) z_j(t, \lambda) dt + \\ &+ \int_{-g(|\lambda|)}^x \exp \left\{ \int_t^x (\omega_i(\tau, \lambda) - \omega_1(\tau, \lambda)) d\tau \right\} \sum_{j=1}^{sn} c_{ij}(t, \lambda) z_j(t, \lambda) dt, \\ &\text{если } i = \overline{2, sn}, \operatorname{Re}(\omega_i - \omega_1) < 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Как и в первом случае, получаем, что (16) имеет решение с асимптотикой (14) и удовлетворяющее тому же начальному условию (15). От решения  $\bar{Z}(x, \lambda)$  с асимптотикой (14), применяя (11), возвратимся к решению  $\bar{Y}(x, \lambda)$  системы (2) и, следовательно, к решению системы уравнений (1). Из (9), (11) и (14) вытекает оценка (8). На лучах  $\arg \lambda = \psi$ , где величины  $\operatorname{Re}(\omega_i - \omega_j)$  ( $i \neq j$ ) не сохраняют знак, оценка (8) выполняется по непрерывности. Лемма 1 доказана.

Далее оценим то же самое, что и в лемме 1, решение системы уравнений (1) при  $|x| \geq g(|\lambda|)$ .

**Лемма 2.** Пусть выполнены условия леммы 1. Тогда решение системы уравнений (1), удовлетворяющее (8), при  $|x| \geq g(|\lambda|)$ ,  $\operatorname{Re} \lambda \geq \alpha > 0$  имеет оценку

$$\|Y^{(j)}(x, \lambda)\| \leq c_3 h^{j \frac{\gamma_N}{\gamma_1}}(x) e^{c_4 h^{\frac{\gamma_N}{\gamma_1}}(x) |x|} \quad (17)$$

( $j = \overline{0, n-1}$ ,  $c_3 > 0$ ,  $c_4 > 0$ ).

*Доказательство.* Пусть  $x \in [g(|\lambda|), r]$ . Тогда из монотонности  $h(x)$  и (7) следует, что  $h(r) \geq h(x) \geq |\lambda|^{\gamma_1}$ . Поэтому для элементов матрицы  $A(x, \lambda)$  из (6) при тех же значениях  $x$  получаем

$$|\Delta_{i+1}^{pq}(x, \lambda)| \leq \sum_{j=0}^{m_i} h^{p_0(d_i-j)}(r) |\lambda|^j \leq c_0 h^{p_0 d_i}(r), \quad (18)$$

$i = \overline{0, n-1}$ ,  $p, q = \overline{1, s}$ ,  $c_0 > 0$  — некоторая постоянная, не зависящая от  $r$  и  $\lambda$ . Наряду с системой (3) рассмотрим систему

$$V' = D(r)V, \quad (19)$$

где  $V = (V_1, \dots, V_{sn})^T$ , а неотрицательная матрица  $D(r)$  отличается от  $A(x, \lambda)$  лишь последней блочной строкой  $(C_0 h^{p_0 d_0}(r), \dots, C_0 h^{p_0 d_{n-1}}(r))$ , где  $C_0$  — квадратная матрица размерности  $s$ , все элементы которой равны числу  $c_0$  из оценки (18). Характеристическое уравнение системы (19) имеет вид

$$\det \left\{ \mu^n E - C_0 \sum_{k=0}^{n-1} h^{p_0 d_k}(r) \mu^k \right\} = 0. \quad (20)$$

Уравнение (20) перепишем в развернутом виде [1]:

$$(-\mu^n)^s + (-\mu^n)^{s-1} s c_0 \sum_{k=0}^{n-1} h^{p_0 d_k}(r) \mu^k = 0. \quad (21)$$

Уравнение (21) имеет корень  $\mu = 0$  — корень кратности  $ns - n$ , а остальные его корни удовлетворяют уравнению

$$\mu^n - s c_0 \sum_{k=0}^{n-1} h^{p_0 d_k}(r) \mu^k = 0. \quad (22)$$

Диаграммы Ньютона уравнений (3) и (22) подобны с коэффициентом подобия  $s$ . Поскольку  $D(r)$  — матрица с неотрицательными элементами, то характеристическое уравнение (20), а тогда и уравнение (22), имеет максимальный положительный корень, которому соответствует положительный собственный вектор [1, с. 334]. Покажем, что уравнение (22) имеет положительный корень  $\mu_0(r)$  вида

$$\mu_0(r) = a_0 h^{p_0 \gamma_N}(r) (1 + o(1)), \quad (23)$$

где  $a_0 > 0$ ,  $o(1) \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow \infty$ . Для этого положим в (26)  $\mu = at^{\gamma_N}(1 + \theta)$ ,  $t = h^{p_0}(r)$ , где  $a$  — постоянная,  $\theta$  — новая переменная. Разделив (22) на  $t^{n\gamma_N}$ , получим

$$a^n (1 + \theta)^n - s c_0 \sum_{k=0}^{n-1} t^{d_k + \gamma_N(k-n)} a^k (1 + \theta)^k = 0. \quad (24)$$

Из определения чисел  $d_k$  и  $\gamma_N$  следует, что

$$\frac{d_k}{n - k} \leq \gamma_N \quad (k = \overline{0, n-1}) \quad [5], \quad (25)$$

причем равенство в (25) достигается лишь при  $k_{N-1} \leq k < n$ . Из (25) имеем, что все коэффициенты, стоящие при степенях  $\theta$  в уравнении (24), стремятся к константам при  $t \rightarrow \infty$ . Кроме того, если  $a_0$  — один из корней уравнения

$$a^{q_N} - s \sum_{k \in \Gamma(N) \setminus \{n\}} c_0 a^{k - k_{N-1}} = 0, \quad (26)$$

где  $q_N = k_N - k_{N-1}$ , то свободный член уравнения (24) есть  $o(1)$  ( $t \rightarrow \infty$ ). Тогда (24) имеет корень  $\theta = o(1)$  ( $r \rightarrow \infty$ ).

Заметим, что так как  $c_0 > 0$ , то (26) имеет положительный корень  $a_0$ . Формула (23) доказана.

Обозначим в виде  $e = (1, 1, \dots, 1)$  — вектор длины  $s$ ,

$$d(r) = (e, \mu_0(r)e, \dots, \mu_0^{n-1}(r)e)^T$$

— собственный вектор матрицы  $D(r)$ . Пусть  $b > 0$  — некоторая постоянная

ная. Вектор-функция  $V(x, r, \lambda) = bd(r)e^{\mu_0(r)x}$  — положительное решение системы (19). Если  $b > 0$  достаточно велико, то для координат  $V_j(x, r)$  вектор-функции  $V(x, r)$  из (23) при  $x = g(|\lambda|)$  получаем оценку

$$\begin{aligned} V_j(g(|\lambda|), r) &\geq b \left( \frac{a_0}{2} h^{p_0 \gamma_N}(r) \right) e^{\frac{a_0}{2} h^{p_0 \gamma_N}(r) g(|\lambda|)} \geq \\ &\geq b \left( \frac{a_0}{2} \right)^j |\lambda|^{j \gamma_N} e^{\frac{a_0}{2} |\lambda|^{\gamma_N} g(|\lambda|)} \geq \\ &\geq |y_j(g(|\lambda|), \lambda)| \quad (j = \overline{0, sn-1}), \end{aligned} \quad (27)$$

где  $y_j$  — координаты решения системы (3) с оценкой (8).

Из (18) и (27) следует, что

$$|y_j(x, \lambda)| \leq V_j(x, r) \quad (j = \overline{0, sn-1}) \quad (28)$$

при  $g(|\lambda|) \leq x \leq r$  [7, с. 42]. Из (28) при  $x = r$  получаем (17) при  $x \geq g(|\lambda|)$ . Случай  $x \leq -g(|\lambda|)$  сводится к предыдущему заменой

$$-x = t, \quad Y(x, \lambda) = Y(-t, \lambda) = \tilde{Y}(t, \lambda),$$

так как оценки (6) симметричны относительно начала координат. Лемма 2 доказана.

Из лемм 1 и 2 следует теорема об оценке решения системы (1).

**Теорема.** Пусть коэффициенты системы уравнений (1) удовлетворяют условиям 1–3. Тогда система уравнений (1) имеет решение  $Y(x, \lambda)$ , удовлетворяющее оценке

$$\|Y^{(j)}(x, \lambda)\| \leq c_3 \left( h^{\frac{\gamma_N}{\gamma_1}}(x) + |\lambda|^{\gamma_N} \right)^j e^{c_4 \left( h^{\frac{\gamma_N}{\gamma_1}}(x) + |\lambda|^{\gamma_1} \right) |x|},$$

$j = \overline{0, n-1}$ ,  $-\infty < x < \infty$ ,  $\operatorname{Re} \lambda \geq \alpha > 0$ ,  $c_3, c_4$  — некоторые положительные постоянные, не зависящие ни от  $x$ , ни от  $\lambda$ .

Доказательство теоремы следует из оценок (8) и (17), полученных в леммах 1 и 2.

#### Библиографический список

1. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М. : Наука, 1988. 548 с.
2. Житомирский Я. И. Классы единственности решения задачи Коши для линейных уравнений с растущими коэффициентами // Известия АН СССР. Сер. математическая. 1967. Т. 31, вып. 4. С. 763–782.
3. Золотарев Г. Н. Нетривиальные решения задачи Коши с нулевыми начальными условиями // Ученые записки Ивановского государственного педагогического института. 1963. Т. 31. С. 29–36.
4. Косарев Н. Г. О единственности решения задачи Коши для линейных уравнений с переменными коэффициентами // Качественные и приближенные методы исследования операторных уравнений. Ярославль : Яросл. гос. ун-т, 1977. Вып. 2. С. 141–158.
5. Туртин Д. В. Асимптотика решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром // Математика и ее приложения : журнал Ивановского математического общества. 2006. Вып. 1 (3). С. 67–80.
6. Туртин Д. В. О максимальных классах неединственности решения задачи Коши для линейных уравнений // Известия вузов. Математика. 2010. № 9. С. 90–93.
7. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М. : Мир, 1970. 720 с.
8. Чеботарев Н. Г. Теория алгебраических функций. М. : Гостехиздат, 1948. 396 с.

УДК 512.543

Д. И. Молдаванский

## ОБ АППРОКСИМИРУЕМОСТИ КОНЕЧНЫМИ ГРУППАМИ НЕКОТОРЫХ ГРУПП С ОДНИМ ОПРЕДЕЛЯЮЩИМ СООТНОШЕНИЕМ

Доказано, что группа  $\langle a, t; t^{-1}a^{-k}ta^mt^{-1}a^kt = a^m \rangle$  аппроксимируема конечными  $\pi$ -группами тогда и только тогда, когда  $m$  и  $k$  являются  $\pi$ -числами.

**Ключевые слова:** аппроксимируемость группы в некотором классе групп, отделимость подгрупп в некотором классе групп,  $HNN$ -расширение групп.

It is proved that the group  $\langle a, t; t^{-1}a^{-k}ta^mt^{-1}a^kt = a^m \rangle$  is residually a finite  $\pi$ -group if and only if  $m$  and  $k$  are  $\pi$ -numbers.

**Key words:** residuality of group in some class of groups, separability of subgroups in some class of groups,  $HNN$ -extension of groups.

### 1. Введение

Пусть  $\mathcal{X}$  — некоторый класс групп. Напомним, что группа  $G$  называется аппроксимируемой группами из этого класса ( $\mathcal{X}$ -аппроксимируемой), если для любого неединичного элемента  $g \in G$  существует гомоморфизм группы  $G$  на группу из класса  $\mathcal{X}$ , образ при котором элемента  $g$  отличен от единицы. Подгруппа  $H$  группы  $G$  называется отделимой в классе  $\mathcal{X}$  ( $\mathcal{X}$ -отделимой), если для произвольного элемента  $g \in G$ , не принадлежащего подгруппе  $H$ , существует гомоморфизм группы  $G$  на группу из класса  $\mathcal{X}$ , образ при котором элемента  $g$  не входит в образ подгруппы  $H$ .

Как обычно, через  $\mathcal{F}$  обозначается класс всех конечных групп, через  $\mathcal{F}_p$  — класс всех конечных  $p$ -групп и через  $\mathcal{F}_\pi$  — класс всех конечных  $\pi$ -групп, где  $\pi$  — некоторое (непустое) множество простых чисел.

В данной работе продолжают исследования аппроксимационных свойств групп, принадлежащих семейству групп, определяемых представлением вида

$$G(l, m; k) = \langle a, t; t^{-1}a^{-k}ta^lt^{-1}a^kt = a^m \rangle,$$

где  $l, m, k$  — произвольные целые числа, отличные от нуля. Поскольку, как легко видеть, группы  $G(l, m; k)$ ,  $G(l, m; -k)$ ,  $G(-l, -m; k)$  и  $G(m, l; k)$  попарно изоморфны, без потери общности можно считать, что числовые параметры, определяющие группу этого семейства, удовлетворяют неравенствам  $k > 0$  и  $|l| \geq m > 0$ ; в формулировках всех утверждений ниже выполнимость этих условий предполагается.

Заметим также, что введение в представление группы  $G(l, m; k)$  еще одного порождающего символа  $b$  вместе с определяющим соотношением  $b = t^{-1}a^kt$  дает ее представление вида

$$G(l, m; k) = \langle a, t; b^{-1}a^lb = a^m, t^{-1}a^kt = b \rangle,$$

которое делает очевидным, что эта группа является  $HNN$ -расширением

© Молдаванский Д. И., 2018

Публикуемые результаты получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России № 1.8695.2017/8.9.

• Серия «Естественные, общественные науки»

группы  $H(l, m) = \langle a, b; b^{-1}a^l b = a^m \rangle$ , принадлежащей к известному семейству групп Баумслэга — Солитэра [6].

А именно, обозначив через  $A$  и  $B$  циклические подгруппы группы  $H(l, m)$ , порожденные соответственно элементами  $a$  и  $b$ , мы видим, что группа  $G(l, m; k)$  есть  $HNN$ -расширение

$$G(l, m; k) = (H(l, m), t; t^{-1}A^k t = B, \varphi)$$

группы  $H(l, m)$  с проходной буквой  $t$  и подгруппами  $A^k$  и  $B$ , связанными в соответствии с изоморфизмом  $\varphi A^k$  на  $B$ , определяемым отображением  $a^k \mapsto b$ .

Систематическое изучение этих групп, по-видимому, впервые предпринял А. М. Бруннер [7]. Впрочем, на группы этого класса еще в 1969 г. обратил внимание Г. Баумслэг [5], доказав, что все конечные гомоморфные образы группы  $G(2, 1; 1)$  являются циклическими группами (и приводя тем самым еще один пример группы с одним определяющим соотношением, не аппроксимируемой конечными группами). Исследования Бруннера были продолжены затем в работе [3] и ряде других; краткий обзор некоторых результатов, полученных в [7] и [3], приведен в [1].

Перечислим известные результаты об аппроксимационных свойствах групп  $G(l, m; k)$ . Критерий  $\mathcal{F}$ -аппроксимируемости этих групп, полученный в работе [3] (в [7] отмечена без доказательства необходимость условия), формулируется следующим образом:

**Предложение 1.1.** *Группа  $G(l, m; k)$   $\mathcal{F}$ -аппроксимируема тогда и только тогда, когда  $|l| = m$ .*

В работе [10] было показано, что равенство  $|l| = m$  гарантирует справедливость и более сильных аппроксимационных свойств: при его выполнении группа  $G(l, m; k)$   $\mathcal{F}$ -аппроксимируема относительно сопряженности и в этой группе все циклические подгруппы  $\mathcal{F}$ -отделимы.

Так как любая  $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируемая группа является  $\mathcal{F}$ -аппроксимируемой, то следующее утверждение, доказанное в [4], доставляет критерий  $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируемости групп рассматриваемого семейства.

**Предложение 1.2.** *Для любого простого числа  $p$  группа  $G(m, m; k)$   $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируема тогда и только тогда, когда  $m = p^r$  и  $k = p^s$  для некоторых целых чисел  $r \geq 0$  и  $s \geq 0$ , а группа  $G(-m, m; k)$   $\mathcal{F}_p$ -аппроксимируема тогда и только тогда, когда  $p = 2$ ,  $m = 2^r$ ,  $k = 2^s$  для некоторых целых чисел  $r \geq 0$  и  $s \geq 0$ , удовлетворяющих условию  $s \leq r$ .*

Основным результатом данной работы является следующее обобщение первого утверждения предложения 1.2:

**Теорема.** *Для произвольного множества  $\pi$  простых чисел группа  $G(m, m; k)$  является  $\mathcal{F}_\pi$ -аппроксимируемой тогда и только тогда, когда  $m$  и  $k$  являются  $\pi$ -числами.*

Вопрос о соответствующем критерии для групп вида  $G(-m, m; k)$  остается открытым. Можно утверждать лишь, что если такая группа  $\mathcal{F}_\pi$ -аппроксимируема, то  $m$  и  $k$  являются  $\pi$ -числами и множество  $\pi$  содержит число 2 (см. предложение 3.1 ниже). Из второго утверждения предложения 1.2 следует, что это условие, вообще говоря, достаточным не является.

## 2. Предварительные замечания

Приведем ряд необходимых нам результатов о группах Баумслэга — Солитэра.

**Предложение 2.1** [2, теорема 4]. *Для любого множества простых чисел группа  $H(m, m)$   $\mathcal{F}_\pi$ -аппроксимируема тогда и только тогда, когда  $m$  является  $\pi$ -числом, а группа  $H(-m, m)$   $\mathcal{F}_\pi$ -аппроксимируема тогда и только тогда, когда  $m$  является  $\pi$ -числом и множество  $\pi$  содержит число 2.*

Докажем теперь

**Предложение 2.2.** *Пусть  $\pi$  — некоторое множество простых чисел и пусть  $m$  и  $k$  являются  $\pi$ -числами. Тогда в группе  $H(m, m)$  подгруппы  $A^k$  и  $B$   $\mathcal{F}_\pi$ -отделимы.*

*Доказательство.* Если в представление  $\langle a, b; b^{-1}a^mb = a^m \rangle$  группы  $H = H(m, m)$  ввести новый порождающий элемент  $c$  вместе с соотношением  $c = a^m$ , становится понятно, что эта группа является свободным произведением с объединенной подгруппой  $A^m$  группы  $A$  и свободной абелевой группы  $U = \langle b, c; bc = cb \rangle$ :  $H = (A * U; A^m)$ .

Требуется показать, что для любого элемента  $g \in H$  из того, что  $g \notin A^k$  ( $g \notin B$ ), следует существование такого гомоморфизма  $\varphi$  группы  $H$  на конечную  $\pi$ -группу, что  $g\varphi \notin A^k\varphi$  (соответственно,  $g\varphi \notin B\varphi$ ).

Рассмотрим сначала случай, когда элемент  $g$  не принадлежит ни одному из свободных множителей, т. е. длина  $l$  его несократимой записи  $x_1x_2 \cdots x_l$  больше единицы. Поскольку тогда каждый слог  $x_i$  этой записи не входит в объединяемую подгруппу, произвольный  $A$ -слог имеет вид  $a^r$ , где  $m \nmid r$ , а произвольный  $U$ -слог имеет вид  $c^r b^s$ , где  $s \neq 0$ .

Фиксируем  $\pi$ -число  $q$ , не делящее показателей степени у элемента  $b$  во всех  $U$ -словах этой записи элемента  $g$ , и обозначим через  $\overline{H}$  факторгруппу группы  $H$  по нормальному замыканию элементов  $a^m$  и  $b^q$ . Так как группа  $\overline{H}$  определяется представлением

$$\langle a, b; b^{-1}a^mb = a^m, a^m = 1, b^q = 1 \rangle,$$

а потому и представлением

$$\langle a, b; a^m = 1, b^q = 1 \rangle,$$

она является обычным свободным произведением двух конечных  $\pi$ -групп  $\overline{A} = A/A^m$  и  $\overline{B} = B/B^q$  и потому  $\mathcal{F}_\pi$ -аппроксимируема.

Обозначим также через  $\varphi$  естественный гомоморфизм группы  $H$  на группу  $\overline{H}$  и через  $\overline{h}$   $\varphi$ -образ произвольного элемента  $h \in H$ . Поскольку запись  $\overline{x}_1\overline{x}_2 \cdots \overline{x}_l$  элемента  $\overline{g}$  является, очевидно, несократимой в свободном разложении  $\overline{H} = \overline{A} * \overline{B}$  группы  $\overline{H}$ , этот элемент не входит ни в подгруппу  $\overline{A}$ , ни в подгруппу  $\overline{B}$ , и так как в  $\mathcal{F}_\pi$ -аппроксимируемой группе все конечные подгруппы  $\mathcal{F}_\pi$ -отделимы, существуют гомоморфизмы  $\rho$  и  $\sigma$  группы  $\overline{H}$  на конечные  $\pi$ -группы такие, что  $g(\varphi\rho) \notin A(\varphi\rho)$  (и тем более  $g(\varphi\rho) \notin A^k(\varphi\rho)$ ) и  $g(\varphi\sigma) \notin B(\varphi\sigma)$ .

Предположим теперь, что элемент  $g$  принадлежит одному из свободных сомножителей группы  $H$  и не входит в подгруппу  $A^k$ . Если  $g \in A$ , то при гомоморфизме группы  $H$  в аддитивную группу кольца  $\mathbb{Z}_k$  вычетов

целых чисел по модулю  $k$ , определяемом отображением  $a \mapsto \bar{1}$  и  $b \mapsto \bar{0}$ , образ подгруппы  $A^k$  равен нулевой подгруппе, а образ элемента  $g$  отличен от нуля. Если элемент  $g$  принадлежит подгруппе  $U$  и не входит в  $A$ , то  $g = c^r b^s$  для некоторых целых  $r$  и  $s$ , причем  $s \neq 0$ . Тогда при определенном выше естественном гомоморфизме  $\varphi$  группы  $H$  на ее фактор-группу  $\bar{H}$  по нормальному замыканию элементов  $a^m$  и  $b^q$ , где  $q$  —  $\pi$ -число, не делящее  $s$ , образ  $\bar{g}$  элемента  $g$  является неединичным элементом свободного множителя  $\bar{B}$  и потому не входит в подгруппу  $\bar{A}$ . Построение гомоморфизма группы  $H$  на конечную  $\pi$ -группу, отделяющего элемент  $g$  от подгруппы  $A^k$ , заканчивается так же, как при рассмотрении элемента длины  $> 1$ .

Если элемент  $g$  не принадлежит подгруппе  $B$  и входит в подгруппу  $A$ , т. е.  $g = a^r$  для некоторого  $r \neq 0$ , то гомоморфизм группы  $H$  в аддитивную группу кольца  $\mathbb{Z}_n$  вычетов целых чисел по модулю  $n$ , определяемый отображением  $a \mapsto \bar{1}$  и  $b \mapsto \bar{0}$ , где  $n$  —  $\pi$ -число, не делящее  $r$ , является искомым. Если элемент  $g$  лежит в подгруппе  $U$  (и по-прежнему не входит в  $B$ ), то  $g = c^r b^q = a^{mr} b^q$  для некоторых целых  $r$  и  $q$ , причем  $r \neq 0$ . В этом случае искомым является аналогичный гомоморфизм группы  $H$  в группу  $\mathbb{Z}_n$ , где  $\pi$ -число  $n$  не является делителем числа  $mr$ .

Предложение 2.2 доказано.

Для произвольного целого положительного числа  $n$  обозначим через  $R_n$  нормальное замыкание в группе  $H = H(m, m)$  элементов  $a^{kn}$  и  $b^n$ . Таким образом, фактор-группа  $\bar{H}_n = H/R_n$  определяется представлением

$$\langle a, b; b^{-1} a^m b = a^m, a^{kn} = 1, b^n = 1 \rangle.$$

Добавив к этому представлению еще один порождающий  $c$  вместе с соотношением  $c = a^m$ , мы видим, что группа  $\bar{H}_n$  является свободным произведением циклической группы  $\bar{A} = \langle a; a^{kn} = 1 \rangle$  порядка  $kn$  и прямого произведения

$$\bar{U} = \langle c, b; cb = bc, c^s = 1, b^n = 1 \rangle$$

двух циклических групп порядков  $s$  и  $n$  (где число  $s$  равно порядку элемента  $a^m$  группы  $\bar{A}$ ) с объединенной подгруппой  $\bar{A}^m$ . Поэтому имеет место

**Предложение 2.3.** *Порядки элементов  $a$  и  $b$  группы  $\bar{H}_n = H/R_n$  равны числам  $kn$  и  $n$  соответственно. В частности, порядки элементов  $a^k$  и  $b$  совпадают.*

Нам потребуется также

**Предложение 2.4.** *Если  $t$  является  $\pi$ -числом, то в группе  $H = H(m, m)$  пересечение всех подгрупп  $R_n$ , где  $n$  — произвольное положительное  $\pi$ -число, совпадает с единичной подгруппой.*

Действительно, в силу предложения 2.1 для любого неединичного элемента  $h \in H$  в группе  $H$  найдется нормальная подгруппа  $N$  конечного  $\pi$ -индекса, не содержащая этого элемента. Если порядки по модулю подгруппы  $N$  элементов  $a^k$  и  $b$  равны числам  $r$  и  $s$  соответственно, то  $\pi$ -число  $n = rs$  таково, что  $a^{kn} \in N$  и  $b^n \in N$ . Поэтому подгруппа  $R_n$  содержится в  $N$  и, следовательно, не содержит элемента  $h$ .

Докажем, наконец,

**Предложение 2.5.** *Если  $m$  является  $\pi$ -числом, то при любом положительном  $\pi$ -числе  $n$  группа  $\overline{H}_n = H(m, m)/R_n$  является  $\mathcal{F}_\pi$ -аппроксимлируемой.*

Покажем, в самом деле, что для любого неединичного элемента  $h$  группы

$$\overline{H}_n = \langle a, b; b^{-1}a^mb = a^m, a^{kn} = 1, b^n = 1 \rangle$$

существует гомоморфизм этой группы на конечную  $\pi$ -группу, образ при котором элемента  $h$  неединичен.

Если элемент  $h$  не входит в подгруппу группы  $\overline{H}_n$ , порожденную элементом  $a^m$ , то его образ в фактор-группе группы  $\overline{H}_n$  по этой (центральной) подгруппе отличен от единицы. Так как эта фактор-группа имеет представление  $\langle a, b; a^d = 1, b^n = 1 \rangle$  (где  $d = (kn, m)$ ), т. е. является свободным произведением двух конечных циклических  $\pi$ -групп и потому [8]  $\mathcal{F}_\pi$ -аппроксимлируема, существование требуемого гомоморфизма очевидно.

В случае, когда элемент  $h$  принадлежит подгруппе, порожденной элементом  $a^m$ , искомым будет, например, гомоморфизм группы  $\overline{H}_n$  в аддитивную группу кольца  $\mathbb{Z}_{kn}$  вычетов целых чисел по модулю  $kn$ , определяемый отображением  $a \mapsto \bar{1}$  и  $b \mapsto \bar{0}$ .

### 3. Доказательство теоремы

Необходимость сформулированных в теореме условий  $\mathcal{F}_\pi$ -аппроксимлируемости группы  $G(m, m; k)$  вытекает из следующего предложения.

**Предложение 3.1.** *Пусть для некоторого множества  $\pi$  простых чисел группа  $G(l, m; k)$  является  $\mathcal{F}_\pi$ -аппроксимлируемой. Тогда*

- (1)  $l = m\varepsilon$  для некоторого  $\varepsilon = \pm 1$ ,
- (2)  $m$  является  $\pi$ -числом,
- (3)  $k$  является  $\pi$ -числом,
- (4) если  $\varepsilon = -1$ , то множество  $\pi$  содержит число 2.

Поскольку всякая подгруппа  $\mathcal{F}_\pi$ -аппроксимлируемой группы  $\mathcal{F}_\pi$ -аппроксимлируема, то в силу предложения 2.1 доказательства требует только утверждение пункта 3.

Если, напротив,  $k$  не является  $\pi$ -числом, то  $k = pk_1$  для некоторого простого числа  $p$ , не принадлежащего множеству  $\pi$ , и некоторого целого числа  $k_1$ . Так как  $k_1$  — положительное число, строго меньшее, чем  $k$ , в группе  $H = H(m, m\varepsilon)$  элемент  $a^{k_1}$  не принадлежит подгруппе  $A^k$ , а поскольку в этой группе пересечение подгрупп  $A$  и  $B$  тривиально, элемент  $a^m$  не принадлежит подгруппе  $B$ .

При  $\varepsilon = 1$  рассмотрим элемент  $g = (t^{-1}a^{k_1}t)^{-1}a^m(t^{-1}a^{k_1}t)a^{-m}$  группы  $G(m, m; k)$ . Этот элемент отличен от 1, так как его запись

$$t^{-1}a^{-k_1}ta^{-m}t^{-1}a^{k_1}ta^{-m}$$

является приведенной в  $HNN$ -расширении  $G(m, m; k)$  группы  $H(m, m)$ .

С другой стороны, пусть  $N$  — произвольная нормальная подгруппа конечного  $\pi$ -индекса группы  $G(m, m; k)$  и пусть порядок элемента  $a$  по модулю этой подгруппы равен  $r$ . Так как  $r$  является  $\pi$ -числом, чис-

ла  $r$  и  $p$  взаимно просты. Поэтому существует целое число  $x$ , удовлетворяющее сравнению  $px \equiv 1 \pmod{r}$ . Отсюда имеем

$$\begin{aligned} a^{k_1} &\equiv a^{k_1 px} = a^{kx} \pmod{N}, \\ t^{-1} a^{k_1} t &\equiv t^{-1} a^{kx} t = b^x \pmod{N}, \\ g &\equiv b^{-x} a^m b^x a^{-m} = 1 \pmod{N}. \end{aligned}$$

Таким образом, неединичный элемент группы  $G(m, m; k)$  принадлежит каждой нормальной подгруппе конечного  $\pi$ -индекса этой группы, что противоречит ее  $\mathcal{F}_\pi$ -аппроксимируемости.

Пусть  $\varepsilon = -1$ . Тогда множество  $\pi$  содержит число 2 и потому элемент  $a^{2k_1}$  не принадлежит подгруппе  $A^k$ . Действительно, если  $a^{2k_1} \in A^k$ , то  $k|2k_1$ , т. е.  $pk_1|2k_1$ , откуда  $p = 2$ , что невозможно. Поэтому в группе  $G(m, -m; k)$  элемент  $g = (t^{-1} a^{2k_1} t)^{-1} a^m (t^{-1} a^{2k_1} t) a^{-m}$  отличен от единицы и, если для нормальной подгруппы  $N$  конечного  $\pi$ -индекса этой группы числа  $r$  и  $x$  выбраны так же, как в первом случае, то, рассуждая аналогично, получаем сравнение

$$t^{-1} a^{2k_1} t \equiv t^{-1} a^{2kx} t = b^{2x} \pmod{N},$$

откуда, как и выше, получаем

$$g \equiv b^{-2x} a^m b^{2x} a^{-m} = 1 \pmod{N}.$$

Таким образом, мы снова пришли к противоречию, и утверждение 3 предложения 3.1 доказано.

Из предложения 2.3 легко следует, что для любого целого числа  $n$  нормальное замыкание  $R_n$  в группе  $H = H(m, m)$  элементов  $a^{kn}$  и  $b^n$  является  $(A^k, B, \varphi)$ -совместимой подгруппой.

Напомним, что выше через  $\varphi$  был обозначен изоморфизм подгруппы  $A^k$  группы  $H$  на ее подгруппу  $B$ , определяемый отображением  $a^k \mapsto b$ , и что  $(A^k, B, \varphi)$ -совместимость подгруппы  $R_n$  означает, по определению, выполнимость равенства  $(A^k \cap R_n)\varphi = B \cap R_n$ .

Это свойство подгруппы  $R_n$  позволяет, как обычно, наряду с группой

$$G(m, m; k) = (H(m, m), t; t^{-1} A^k t = B, \varphi)$$

построить  $HNN$ -расширение

$$\overline{G}_n = (\overline{H}_n, t_n; t_n^{-1} \overline{A}^k t_n = \overline{B}, \overline{\varphi}_n)$$

с проходной буквой  $t_n$  группы  $\overline{H}_n = H/R_n$  и подгруппами  $\overline{A}^k = A^k R_n/R_n$  и  $\overline{B} = B R_n/R_n$ , связанными в соответствии с изоморфизмом  $\overline{\varphi}_n$ , определяемым отображением  $a^k R_n \mapsto b R_n$ .

Кроме того, существует гомоморфизм  $\rho_n$  группы  $G = G(m, m; k)$  на группу  $\overline{G}_n$ , продолжающий естественный гомоморфизм базовой подгруппы  $H$  группы  $G$  на базовую подгруппу  $\overline{H}_n$  группы  $\overline{G}_n$  и переводящий проходную букву  $t$  в проходную букву  $t_n$ . Известно, что ядро  $S_n$  гомоморфизма  $\rho_n$  совпадает с нормальным замыканием в группе  $G$  подгруппы  $R_n$ .

**Предложение 3.2.** *Если  $m$  и  $k$  являются  $\pi$ -числами, то в группе*

$$G(m, m; k) = (H(m, m), t; t^{-1} A^k t = B, \varphi)$$

*пересечение всех подгрупп  $S_n$ , где  $n$  — произвольное положительное  $\pi$ -число, совпадает с единичной подгруппой.*

*Доказательство.* Требуется показать, что для любого неединичного элемента  $g \in G$  найдется  $\pi$ -число  $n$  такое, что элемент  $g$  не входит в подгруппу  $S_n$ .

Пусть  $g = h_0 t^{\varepsilon_1} h_1 t^{\varepsilon_2} h_2 \cdots h_{s-1} t^{\varepsilon_s} h_s$  — приведенная запись неединичного элемента  $g \in G$ .

Если  $s = 0$ , т. е. элемент  $g$  принадлежит подгруппе  $H$ , то в силу предложения 2.4 этот элемент не входит в подгруппу  $R_n$  для некоторого  $\pi$ -числа  $n$ . Так как действие гомоморфизма  $\rho_n$  на подгруппе  $H$  совпадает с естественным гомоморфизмом  $H$  на  $H/R_n$ , элемент  $g\rho_n$  отличен от единицы и потому не входит в подгруппу  $S_n$ .

Предположим теперь, что  $s > 0$ , и для каждого числа  $i = 0, 1, \dots, s-1$  введем в рассмотрение нормальную подгруппу  $N_i$  конечного  $\pi$ -индекса группы  $H$  следующим образом.

В качестве  $N_0$  возьмем произвольную нормальную подгруппу конечного  $\pi$ -индекса группы  $H$ .

Пусть  $1 \leq i < s$ . Тогда

если  $\varepsilon_i = \varepsilon_{i+1}$ , полагаем  $N_i = N_0$ ;

если  $\varepsilon_i = -1$  и  $\varepsilon_{i+1} = 1$ , то элемент  $h_i$  группы  $H$  не принадлежит подгруппе  $A^k$  и через  $N_i$  обозначим некоторую нормальную подгруппу конечного  $\pi$ -индекса группы  $H$ , удовлетворяющую условию  $h_i \notin A^k N_i$ ;

если  $\varepsilon_i = 1$  и  $\varepsilon_{i+1} = -1$ , то элемент  $h_i$  группы  $H$  не принадлежит подгруппе  $B$  и через  $N_i$  обозначим некоторую нормальную подгруппу конечного  $\pi$ -индекса группы  $H$ , удовлетворяющую условию  $h_i \notin B N_i$ .

(Возможность выбора подгруппы во втором и третьем случаях обеспечена предложением 2.2.)

Пересечение  $\bigcap_{i=0}^{s-1} N_i$  является нормальной подгруппой конечного  $\pi$ -индекса группы  $H$ , и, повторяя соответствующее рассуждение в доказательстве предложения 2.4, можно показать, что в подгруппе  $N$  содержится подгруппа  $R_n$  для некоторого  $\pi$ -числа  $n$ . Очевидно, что запись

$$(h_0 R_n) t_n^{\varepsilon_1} (h_1 R_n) t_n^{\varepsilon_2} (h_2 R_n) \cdots (h_{s-1} R_n) t_n^{\varepsilon_s} (h_s R_n)$$

элемента  $g\rho_n$  является приведенной в  $HNN$ -расширении  $G_n$ , а это означает, что  $g\rho_n \neq 1$ , и потому  $g \notin S_n$ . Предложение доказано.

**Предложение 3.3.** Если  $t$  и  $k$  являются  $\pi$ -числами, то для любого положительного  $\pi$ -числа  $n$  группа  $\overline{G}_n$  (определяемая параметрами  $t$  и  $k$ ) является  $\mathcal{F}_\pi$ -аппроксимлируемой.

*Доказательство.* Фиксируем произвольное  $\pi$ -число  $l$  и введем в рассмотрение группу

$$X(n, l) = \langle x_1, x_2, \dots, x_l; [x_i, x_j] = 1, x_i^{kn} = 1 \ (i, j = 1, 2, \dots, l) \rangle,$$

являющуюся, очевидно, абелевой конечной  $\pi$ -группой. Очевидно также, что циклическая перестановка порождающих определяет автоморфизм этой группы, порядок которого равен числу  $l$ . Поэтому группа

$$Y(n, l) = \langle x_1, x_2, \dots, x_l, y; [x_i, x_j] = 1, x_i^{kn} = 1 \ (i, j = 1, 2, \dots, l), \\ y^{-1} x_i y = x_{i+1} \ (i = 1, 2, \dots, l-1), y^{-1} x_l y = x_1, y^l = 1 \rangle$$

является расщепляемым расширением группы  $X(n, l)$  при помощи конечной циклической группы порядка  $l$  и потому является конечной  $\pi$ -группой.

В соответствии с определением конструкции  $HNN$ -расширения группа

$$\bar{G}_n = (\bar{H}_n, t_n; t_n^{-1} \bar{A}^k t_n = \bar{B}, \bar{\varphi})$$

имеет представление

$$\langle a, b, t_n; b^{-1} a^m b = a^m, a^{kn} = 1, b^n = 1, t_n^{-1} a^k t_n = b \rangle.$$

Определим отображение его порождающих символов в группу  $Y(n, l)$  следующим образом:  $a \mapsto x_1, b \mapsto x_2^k, t_n \mapsto y$ .

Очевидно, что первые три определяющих соотношения группы  $\bar{G}_n$  переходят при этом в равенства, выполненные в группе  $Y(n, l)$ . Так как слово  $t_n^{-1} a^k t_n$  переходит в элемент  $y^{-1} x_1^k y = x_2^k$ , совпадающий с образом символа  $b$ , это справедливо и для четвертого соотношения.

Таким образом, указанное отображение продолжаемо до гомоморфизма  $\psi$  группы  $\bar{G}_n$  в группу  $Y(n, l)$ . Так как порядки элементов  $a^k$  и  $b$  группы  $\bar{H}_n$  совпадают с порядками их образов, ядро  $N$  гомоморфизма  $\psi$  тривиально пересекается с каждой из связанных подгрупп. Поэтому в силу теоремы о подгруппах  $HNN$ -расширения [9] группа  $N$  является обычным свободным произведением некоторой свободной группы и некоторого семейства групп, каждая из которых сопряжена с подгруппой базовой группы  $\bar{H}_n$  и потому  $\mathcal{F}_\pi$ -аппроксимируема в силу предложения 2.5. Следовательно, группа  $\bar{G}_n$  является расширением  $\mathcal{F}_\pi$ -аппроксимируемой группы при помощи конечной  $\pi$ -группы и потому  $\mathcal{F}_\pi$ -аппроксимируема. Предложение 3.3 доказано.

$\mathcal{F}_\pi$ -аппроксимируемость группы  $G(m, m; k)$  является очевидным следствием предложений 3.2 и 3.3.

#### Библиографический список

1. Борцев А. В., Молдаванский Д. И. Об изоморфизме некоторых групп с одним определяющим соотношением // Математические заметки. 2006. Т. 79, № 1. С. 34–44.
2. Варламова И. А., Молдаванский Д. И. Об аппроксимируемости конечными группами групп Баумслэга — Солитэра // Вестник Ивановского государственного университета. Сер.: Естественные, общественные науки. 2012. Вып. 2. С. 107–114.
3. Кавуцки М. А., Молдаванский Д. И. Об одном классе групп с одним определяющим соотношением // Алгебраические и дискретные системы : межвузовский сборник научных трудов. Иваново : Иван. гос. ун-т, 1988. С. 35–48.
4. Молдаванский Д. И. Аппроксимируемость конечными  $p$ -группами  $HNN$ -расширений // Вестник Ивановского государственного университета. Сер.: Биология. Химия. Физика. Математика. 2000. Вып. 3. С. 129–140.
5. Baumslag G. A noncyclic one-relator group all of whose finite quotients are cyclic // J. Austral. Math. Soc. 1969. Vol. 10, № 3–4. P. 497–498.
6. Baumslag G., Solitar D. Some two-generator one-relator non-Hopfian groups // Bull. Amer. Math. Soc. 1962. Vol. 68. P. 199–201.
7. Brunner A. M. On a class of one-relator groups // Can. J. Math. 1980. Vol. 50. P. 414–420.
8. Gruenberg K. W. Residual properties of infinite soluble groups // Proc. London Math. Soc. 1957. Vol. 7. P. 29–62.
9. Karrass A., Solitar D. Subgroups of HNN groups and groups with one defining relation // Can. J. Math. 1971. Vol. 28. P. 627–643.
10. Kim G., Tang C. Y. A criterion for the conjugacy separability of certain HNN extensions of groups // J. Algebra. 1999. Vol. 222. P. 574–594.

УДК 512.714

Ю. А. Хашина

## ПРЕДСТАВЛЕНИЕ БИКВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИИ В ВИДЕ СУММЫ/РАЗНОСТИ КВАДРАТОВ

Биквадратичная функция с точностью до постоянного слагаемого может быть представлена в виде суммы/разности четырех квадратов билинейных функций. Существуют биквадратичные функции, не представимые с точностью до постоянного слагаемого в виде суммы/разности меньшего числа квадратов.

**Ключевые слова:** биквадратичная функция, билинейная функция.

Each biquadratic function up to a constant term can be presented in the form of a sum or difference of not more than four squares of bilinear functions. There are biquadratic functions not representable up to a constant in term a sum or difference of less number of squares.

**Key words:** biquadratic function, bilinear function.

При решении некоторых задач компьютерной графики используются биквадратичные функции, т. е. многочлены от двух переменных, квадратичные по каждой из них:

$$F = a_{22}x^2y^2 + 2a_{21}x^2y + 2a_{12}xy^2 + a_{20}x^2 + 2a_{11}xy + a_{02}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{01}y + a_{00}.$$

За последние годы был получен ряд результатов, касающихся биквадратичных функций [1–6].

Биквадратичные функции часто возникают как суммы квадратов билинейных функций. Если биквадратичная функция может быть представлена в виде суммы нескольких полных квадратов билинейных, то с точностью до постоянного слагаемого ее можно представить в виде суммы не более трех таких слагаемых и неотрицательной константы [6].

Возникает вопрос о существовании подобного представления для произвольной биквадратичной функции.

Любая биквадратичная функция может быть представлена в виде суммы/разности квадратов билинейных, поскольку каждый ее член представим в таком виде:

$$\begin{aligned} a_{22}x^2y^2 &= \pm(\sqrt{|a_{22}|}xy)^2, & a_{00} &= \pm(\sqrt{|a_{00}|})^2, \\ a_{20}x^2 &= \pm(\sqrt{|a_{20}|}x)^2, & a_{02}y^2 &= \pm(\sqrt{|a_{02}|}y)^2, \\ 2a_{01}y &= (y + a_{01}/2)^2 - (y - a_{01}/2)^2, \\ 2a_{10}x &= (x + a_{10}/2)^2 - (x - a_{10}/2)^2, \\ 2a_{11}xy &= (xy + a_{11}/2)^2 - (xy - a_{11}/2)^2, \\ 2a_{12}xy^2 &= (xy + a_{12}/2y)^2 - (xy - a_{12}/2y)^2, \\ 2a_{21}x^2y &= (xy + a_{21}/2x)^2 - (xy - a_{21}/2x)^2. \end{aligned}$$

Это представление для некоторых членов, а следовательно, и для  $F$  неоднозначно. Желательно найти минимальное представление вида

$$F = (\alpha_1xy + \beta_1x + \gamma_1y + \delta_1)^2 - (\alpha_2xy + \beta_2x + \gamma_2y + \delta_2)^2 + \dots$$

**Теорема 1.** *Биквадратичная функция с точностью до постоянного слагаемого может быть представлена в виде суммы/разности четырех квадратов.*

*Доказательство.* Выберем первые две билинейные функции так, чтобы остаток содержал степени не выше второй:

$$\begin{cases} \alpha_1^2 - \alpha_2^2 = a_{22} \\ \alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2 = a_{21} \\ \alpha_1\gamma_1 - \alpha_2\gamma_2 = a_{12}. \end{cases}$$

Пусть, например,  $\beta_1 = \gamma_1 = 0$ ,  $\alpha_2^2 = |a_{22}| + 1$ . Тогда

$$\begin{cases} \alpha_1^2 - \alpha_2^2 = a_{22} \\ -\alpha_2\beta_2 = a_{21} \\ -\alpha_2\gamma_2 = a_{12} \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha_1^2 = a_{22} + \alpha_2^2 \\ \beta_2 = -\frac{a_{21}}{\alpha_2} \\ \gamma_2 = -\frac{a_{12}}{\alpha_2}, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} F &= (\alpha_1xy + \delta_1)^2 - (\alpha_2xy + \beta_2x + \gamma_2y + \delta_2)^2 + \\ &+ (a_{20} + \beta_2^2)x^2 + (a_{02} + \gamma_2^2)y^2 + 2(a_{11} - \alpha_1\delta_1 + \alpha_2\delta_2 + \beta_2\gamma_2)xy + \\ &+ 2(a_{10} + \beta_2\delta_2)x + 2(a_{01} + \gamma_2\delta_2)y + a_{00} - \delta_1^2 + \delta_2^2. \end{aligned}$$

Таким образом, задача сводится к представлению в виде суммы/разности квадратов многочлена 2-й степени от двух переменных:

$$F_1 = b_{20}x^2 + 2b_{11}xy + b_{02}y^2 + 2b_{10}x + 2b_{01}y + b_{00}.$$

Если  $F_1 = (\beta_3x + \gamma_3y + \delta_3)^2 - (\beta_4x + \gamma_4y + \delta_4)^2$ , то

$$\begin{cases} \beta_3^2 - \beta_4^2 = b_{20} \\ \gamma_3^2 - \gamma_4^2 = b_{02} \\ \beta_3\gamma_3 - \beta_4\gamma_4 = b_{11} \\ \beta_3\delta_3 - \beta_4\delta_4 = b_{10} \\ \gamma_3\delta_3 - \gamma_4\delta_4 = b_{01} \\ \delta_3^2 - \delta_4^2 = b_{00}. \end{cases}$$

Базис Гребнера соответствующего идеала для  $lex$ -упорядочения, где

$$\delta_4 > \gamma_4 > \beta_4 > \delta_3 > \gamma_3 > b_{00},$$

имеет вид

$$-b_{01}^2 b_{20} + 2b_{11}b_{01}b_{10} - b_{10}^2 b_{02} + b_{00}(-b_{11}^2 + b_{20}b_{02}) = 0,$$

$$b_{11}^2 - b_{20}b_{02} + \beta_3^2 b_{02} - 2\beta_3\gamma_3 b_{11} + \gamma_3^2 b_{20} = 0,$$

$$\begin{aligned}(b_{11}b_{01} - b_{02}b_{10})\beta_3 + (-b_{20}b_{01} + b_{11}b_{10})\gamma_3 + (-b_{11}^2 + b_{20}b_{02})\delta_3 &= 0, \\ \beta_3^2 - \beta_4^2 - b_{20} &= 0, \\ \gamma_4\beta_3^2 - \gamma_4b_{20} - \beta_4\beta_3\gamma_3 + \beta_4b_{11} &= 0, \\ (b_{11}b_{01} - b_{02}b_{10})\beta_4 + (-b_{20}b_{01} + b_{11}b_{10})\gamma_4 + (-b_{11}^2 + b_{20}b_{02})\delta_4 &= 0.\end{aligned}$$

Тогда

$$b_{00} = \frac{b_{01}^2 b_{20} - 2b_{11}b_{01}b_{10} + b_{10}^2 b_{02}}{b_{20}b_{02} - b_{11}^2},$$

$$\gamma_3 - \text{корень уравнения } b_{20}\gamma_3^2 - 2\beta_3b_{11}\gamma_3 + b_{11}^2 + \beta_3^2b_{02} - b_{20}b_{02} = 0,$$

$$\delta_3 = -\frac{(b_{11}b_{01} - b_{02}b_{10})\beta_3 + (-b_{20}b_{01} + b_{11}b_{10})\gamma_3}{b_{20}b_{02} - b_{11}^2},$$

$$\beta_4 - \text{корень уравнения } \beta_3^2 - \beta_4^2 - b_{20} = 0,$$

$$\gamma_4 = \frac{\beta_3\gamma_3 - b_{11}}{\beta_4},$$

$$\delta_4 = -\frac{(b_{11}b_{01} - b_{02}b_{10})\beta_4 + (-b_{20}b_{01} + b_{11}b_{10})\gamma_4}{b_{20}b_{02} - b_{11}^2}.$$

Итак, в общем случае можно представить биквадратичную функцию в виде суммы/разности четырех квадратов и константы.

**Теорема 2.** *Полученное в теореме 1 представление минимально в том смысле, что существуют биквадратичные функции, не представимые с точностью до постоянного слагаемого виде суммы/разности меньшего числа квадратов билинейных функций.*

*Доказательство.* Рассмотрим биквадратичную функцию

$$F = 2x + 2xy^2.$$

Функция  $F$  не ограничена, следовательно, в ее представлении должны присутствовать слагаемые с разными знаками.

Если функция  $F$  с точностью до постоянного слагаемого представима в виде

$$\pm[(\alpha_1xy + \beta_1x + \gamma_1y + \delta_1)^2 + (\alpha_2xy + \beta_2x + \gamma_2y + \delta_2)^2 - (\alpha_3xy + \beta_3x + \gamma_3y + \delta_3)^2],$$

то, приравнявая коэффициенты, получим систему уравнений

$$\begin{cases} \alpha_1^2 + \alpha_2^2 - \alpha_3^2 = 0 \\ \beta_1^2 + \beta_2^2 - \beta_3^2 = 0 \\ \gamma_1^2 + \gamma_2^2 - \gamma_3^2 = 0 \\ \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 - \alpha_3\beta_3 = 0 \\ \gamma_1\delta_1 + \gamma_2\delta_2 - \gamma_3\delta_3 = 0 \\ \alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2 - \alpha_3\gamma_3 = \pm 1 \\ \beta_1\delta_1 + \beta_2\delta_2 - \beta_3\delta_3 = \pm 1 \\ \alpha_1\delta_1 + \alpha_2\delta_2 - \alpha_3\delta_3 + \beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 - \beta_3\gamma_3 = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим подсистему

$$\begin{cases} \alpha_1^2 + \alpha_2^2 - \alpha_3^2 = 0 \\ \beta_1^2 + \beta_2^2 - \beta_3^2 = 0 \\ \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 - \alpha_3\beta_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 2\alpha_3^2 \\ \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = 2\beta_3^2 \\ \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 = 2\alpha_3\beta_3. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\begin{cases} (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)(\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2) = 4\alpha_3^2\beta_3^2 \\ (\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3)^2 = 4\alpha_3^2\beta_3^2 \end{cases} \implies (\bar{\alpha}\bar{\beta})^2 = \bar{\alpha}^2\bar{\beta}^2.$$

Из 7 и 8-го уравнений исходной системы следует, что ни один из векторов  $\bar{\alpha}$ ,  $\bar{\beta}$ ,  $\bar{\gamma}$ ,  $\bar{\delta}$  не нулевой.

Значит,  $\cos^2(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) = 1$  и  $\bar{\beta} = m\bar{\alpha}$ , где  $m \neq 0$ .

Исходная система принимает вид

$$\begin{cases} \alpha_1^2 + \alpha_2^2 - \alpha_3^2 = 0 \\ \gamma_1^2 + \gamma_2^2 - \gamma_3^2 = 0 \\ \gamma_1\delta_1 + \gamma_2\delta_2 - \gamma_3\delta_3 = 0 \\ \alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2 - \alpha_3\gamma_3 = \pm 1 \\ \alpha_1\delta_1 + \alpha_2\delta_2 - \alpha_3\delta_3 = \pm \frac{1}{m} \\ \alpha_1\delta_1 + \alpha_2\delta_2 - \alpha_3\delta_3 + m(\alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2 - \alpha_3\gamma_3) = 0. \end{cases}$$

Следовательно,  $\pm(\frac{1}{m} + m) = 0$ . Противоречие.

Таким образом, не всякую биквадратичную функцию можно с точностью до постоянного слагаемого представить как сумму/разность трех квадратов билинейных.

Полученные результаты могут быть использованы в работах по сжатию видео.

#### Библиографический список

1. Ерохина А. В. Экстремумы биквадратичных функций : дипломная работа / Иван. гос. ун-т. Иваново, 2015. 48 с.
2. Кадочникова А. В. Условия неотрицательности биквадратичной функции : дис. ... магистра математики / Иван. гос. ун-т. Иваново, 2017. 33 с.
3. Конопелько Е. А. Минимум биквадратичной функции двух переменных : дис. ... магистра математики / Иван. гос. ун-т. Иваново, 2006. 26 с.
4. Косоурова Ю. А. Достаточные условия отсутствия минимумов биквадратичной функции на единичном квадрате : дипломная работа / Иван. гос. ун-т. Иваново, 2010. 25 с.
5. Митрофанова М. К. Каноническая форма биквадратного многочлена : дипломная работа / Иван. гос. ун-т. Иваново, 2005. 100 с.
6. Хашина Ю. А. Биквадратичные функции и их представление в виде суммы квадратов // Вестник Ивановского государственного университета. Сер.: Естественные, общественные науки. 2017. Вып. 2. С. 98–104.

## ИНФОРМАЦИЯ ДЛЯ АВТОРОВ

### «ВЕСТНИКА ИВАНОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА»

---

1. В журнал принимаются материалы в электронном виде с приложением одного экземпляра распечатки на белой бумаге.

Максимальный размер статьи — 1,0 авт. л. (20 страниц текста через 1,5 интервала, 30 строк на странице формата А4, не более 65 знаков в строке, выполненного в редакторе Microsoft Word шрифтом Times New Roman или Times New Roman Cyr, кегль 14), сообщения — 0,5 авт. л. (10 страниц).

2. Материал для журнала должен быть оформлен в следующей последовательности: **УДК** (для естественных и технических специальностей), **ББК** (в библиографическом отделе библиотеки ИвГУ); на русском и английском языках: **инициалы и фамилия автора, название материала**, для научных статей — **аннотация** (объемом 10—15 строк), **ключевые слова; текст статьи** (сообщения).

3. Библиографические источники должны быть пронумерованы в алфавитном порядке, ссылки даются в тексте статьи в скобках в строгом соответствии с пристатейным списком литературы. Библиографическое описание литературных источников к статье оформляется в соответствии с ГОСТами 7.1—2003, 7.0.5—2008. В каждом пункте библиографического списка, составленного в алфавитном порядке (сначала произведения на русском языке, затем на иностранном), приводится одна работа. В выходных сведениях обязательно указание издательства и количества страниц, в ссылке на электронный ресурс — даты обращения.

4. Фотографии, прилагаемые к статье, должны быть черно-белыми, контрастными, рисунки — четкими.

5. В конце представленных материалов следует указать полный почтовый адрес автора, его телефон, фамилию, имя, отчество, ученую степень, звание, должность. Материал должен быть подписан всеми авторами.

6. Направление в редакцию ранее опубликованных и принятых к печати в других изданиях работ не допускается.

7. Редакция оставляет за собой право осуществлять литературную правку, корректирование и сокращение текстов статей.

8. Рукописи аспирантов публикуются бесплатно.

### ПРАВИЛА РЕЦЕНЗИРОВАНИЯ СТАТЕЙ

1. Статьи авторов, являющихся преподавателями, сотрудниками или обучающимися ИвГУ, принимаются редакционной коллегией соответствующей серии (выпуска) на основании письменного решения (рекомендации) кафедры или научного подразделения ИвГУ и рецензии доктора наук, не являющегося научным руководителем (консультантом), руководителем или сотрудником кафедры или подразделения, где работает автор.

2. Статьи авторов, не работающих и не обучающихся в ИвГУ, принимаются редакционной коллегией соответствующей серии (выпуска) на основании рекомендации их вуза или научного учреждения и рецензии доктора наук, работающего в ИвГУ.

3. Поступившие статьи проходят далее рецензирование одного из членов редколлегии соответствующей серии (выпуска), являющегося специалистом в данной области.

4. Статья принимается к публикации при наличии двух положительных рецензий и положительного решения редколлегии серии (выпуска). Порядок и очередность публикации статьи определяются в зависимости от объема публикуемых материалов и тематики выпуска.

5. В случае отклонения статьи автору направляется аргументированный отказ в письменной (электронной) форме. Авторы имеют право на доработку статьи или ее замену другим материалом.